INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · A. HERTWIG · K. KLOTTER · K. v. SANDEN
F. SCHLEICHER · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XX. BAND VIERTES HEFT 1952

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Ing.-Archiv

Preis DM 12.60

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel**, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr.-Ing. Dr. **A. Betz**, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A
Geh. Reg.-Rat Professor Dr.-Ing. **A. Hertwig**, Berlin-Wilmersdorf, Sächsische Str. 43
Professor Dr.-Ing. **K. Klotter**, Stanford (Calif), 621 Alvarado Row.
Professor **K. v. Sanden**, Neureut über Karlsruhe, Rosmarinstraße 11
Professor Dr.-Ing. **F. Schleicher**, Dortmund, Plauener Str. 44
Professor Dr.-Ing. **E. Schmidt**, Braunschweig, Harzburger Straße 8a
Professor Dr.-Ing. **E. Sörensen**, Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klar verständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Mit der Annahme des Manuskriptes erwirbt der Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder.

Im „Ingenieur-Archiv" erscheinende Arbeiten dürfen vorher an anderer Stelle nicht veröffentlicht sein und auch später nicht anderweitig veröffentlicht werden.

Photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote von ganzen Heften, einzelnen Beiträgen oder Teilen daraus sind ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Neuenheimer Landstraße 24 / Fernsprecher 24 40 u. 54 30

Berlin W 35
Reichpietschufer 20 / Fernsprecher Sammel-Nr. 24 92 51

Vertriebsvertretung im Ausland:
Lange, Maxwell & Springer Ltd., 41–45 Neal Street, London, W. C. 2

Inhalt:

Seite

Truckenbrodt, E., Ein Quadraturverfahren zur Berechnung der laminaren und turbulenten Reibungsschicht bei ebener und rotationssymmetrischer Strömung. Mit 15 Textabbildungen 212

Pieruschka, E., Ein Stoffgesetzansatz für elastische, anisotrope Medien 229

Krüger, M., Zur Kombination thermischer und elektromagnetischer Felder im Falle der ebenen Platte. Mit 1 Textabbildung 234

Schirmer, H., Über Biegewellen in Stäben. Mit 18 Textabbildungen 247

Trösch, A., Stabilitätsprobleme bei tordierten Stäben und Wellen. Mit 8 Textabbildungen 258

Müller, W., Zur Theorie der rechteckigen Fundamentplatten und Pilzdecken. Mit 7 Textabbildungen 278

INGENIEUR-ARCHIV

XX. BAND VIERTES HEFT 1952

Ein Quadraturverfahren zur Berechnung der laminaren und turbulenten Reibungsschicht bei ebener und rotationssymmetrischer Strömung*.

Von E. Truckenbrodt.

1. Einleitung. Die Berechnung der laminaren und turbulenten Reibungsschicht bei Druckabfall und Druckanstieg ist das entscheidende Problem bei der Bestimmung des Strömungsverlustes in Kanälen und Rohren und des Strömungswiderstandes von Körpern. Dabei möge im folgenden sowohl das ebene wie auch das rotationssymmetrische Problem behandelt werden. Bei unseren Betrachtungen wollen wir uns auf inkompressible Strömungen beschränken.

Während die theoretische Behandlung der laminaren Reibungsschicht grundsätzlich geklärt ist, ist man bei der Behandlung der turbulenten Reibungsschicht immer noch auf halbempirische Zusammenhänge angewiesen. Da im laminaren Fall die exakten Methoden recht langwierig sind, sind hierfür, genau so wie im turbulenten Fall, verschiedene Näherungsverfahren entwickelt worden. Allen diesen Verfahren liegt die erstmalig von *Th. von Kármán* [1] angegebene Impulsgleichung zugrunde.

Das Näherungsverfahren für den ebenen laminaren Fall wurde von *K. Pohlhausen* [2] ausgearbeitet. Es wurde später von *H. Holstein* und *T. Bohlen* [3] dadurch ganz wesentlich verbessert, daß nicht die Grenzschichtdicke wie bei *Pohlhausen*, sondern die Impulsverlustdicke als gesuchte Größe eingeführt wurde. In neuerer Zeit hat nun *K. Wieghardt* [4] zusätzlich zu der Impulsgleichung noch eine Energiegleichung abgeleitet, die er benutzt, um ein zweiparametriges Rechenverfahren zu entwickeln. *A. Walz* [5] hat dieses Verfahren dadurch vereinfacht, daß er wieder zur Einparametrigkeit wie bei den Verfahren von *Pohlhausen* und *Holstein-Bohlen* zurückkehrt. Das dem *Pohlhausen*-Verfahren analoge rotationssymmetrische Verfahren wurde von *S. Tomotika* [6] angegeben. Seine Vereinfachung im Sinne des *Holstein-Bohlen*schen Ansatzes wurde von *F. W. Scholkemeyer* [7] vorgenommen.

Zur Berechnung der ebenen turbulenten Reibungsschicht wurde erstmalig ein Verfahren von *E. Gruschwitz* [8] angegeben. Außer dem Impulssatz benutzt *Gruschwitz* noch eine aus gewissen Energiebetrachtungen gewonnene halbempirische Gleichung zur Bestimmung eines das Geschwindigkeitsprofil in der Reibungsschicht kennzeichnenden Formparameters, welcher die Ablöseempfindlichkeit der Reibungsschicht charakterisiert. Die in dem *Gruschwitz*schen Verfahren auftretenden empirischen Größen wurden von *A. Kehl* [9] erneut untersucht. Ein dem *Gruschwitz*schen ähnliches Verfahren wurde auch von *E. Buri* [10] entwickelt. In Amerika hat sich ein Verfahren von *A. E. von Doenhoff* und *N. Tetervin* [11] als brauchbar erwiesen. Neben dem Impulssatz wird auch bei diesem Verfahren eine empirische Gleichung zur Bestimmung eines das Geschwindigkeitsprofil kennzeichnenden Formparameters benutzt. Ausgehend von dieser

---

* Bericht des Instituts für Strömungsmechanik der T. H. Braunschweig. Die Untersuchung wurde mit Unterstützung der Deutschen Forschungsgemeinschaft durchgeführt.

[1] *Th. v. Kármán*, Z. angew. Math. Mech. 1 (1921), S. 233.

[2] *K. Pohlhausen*, Z. angew. Math. Mech. 1 (1921), S. 252.

[3] *H. Holstein* u. *T. Bohlen*, Lilienthal-Bericht S 10 (1940), S. 5.

[4] *K. Wieghardt*, Ing.-Arch. 16 (1948), S. 231.

[5] *A. Walz*, Ing.-Arch. 16 (1948), S. 243.

[6] *S. Tomotika*, Laminar boundary layer on the surface of a sphere in a uniform stream, ARC-Rep. No. 1678 (1935).

[7] *F. W. Scholkemeyer*, Die laminare Reibungsschicht an rotationssymmetrischen Körpern, Diss. Braunschweig (1943).

[8] *E. Gruschwitz*, Ing.-Arch. 2 (1931), S. 321.

[9] *A. Kehl*, Ing.-Arch. 12 (1943), S. 293.

[10] *E. Buri*, Eine Berechnungsgrundlage für die turbulente Grenzschicht bei beschleunigter und verzögerter Strömung, Diss. Zürich (1931).

[11] *A. E. v. Doenhoff* u. *N. Tetervin*, Determination of general relations for the behaviour of turbulent boundary layers, NACA Rep. No. 772 (1943).

Arbeit hat *H. C. Garner* [1] in England eine Methode entwickelt, die in ihrer numerischen Auswertung derjenigen von *v. Doenhoff-Tetervin* überlegen ist. Die Übertragung des Impulssatzes auf den rotationssymmetrischen Fall wurde von *C. B. Millikan* [2] vorgenommen.

Durch neuere Forschungen von *H. Ludwieg* und *W. Tillmann* [3], sowie *J. Rotta* [4] über die Gesetzmäßigkeiten der turbulenten Strömungen, insbesondere der Wandschubspannung und des Energieverlustes in der Reibungsschicht, ist es möglich, die bestehenden halbempirischen Verfahren besser zu begründen und zu verbessern.

Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit, ein Rechenverfahren zu entwickeln, das gleichermaßen für die vier Fälle laminarer und turbulenter, sowie ebener und rotationssymmetrischer Strömung gilt. Dabei sollen die neuesten Ergebnisse Berücksichtigung finden.

2. Der Impulssatz und Energiesatz. Die Ausgangsgleichungen zur Berechnung der Reibungsschichten bilden in bekannter Weise die *Prandtl*schen Grenzschichtgleichungen und die *Bernoulli*sche Gleichung. Wie wir schon in der Einleitung sagten, wollen wir inkompressible Strömungen betrachten. Da sich aber die nachfolgenden Ableitungen ohne besondere Schwierigkeiten für veränderliche Dichte ϱ angeben lassen, wollen wir den Übergang zur inkompressiblen Strömung erst im Endergebnis vornehmen.

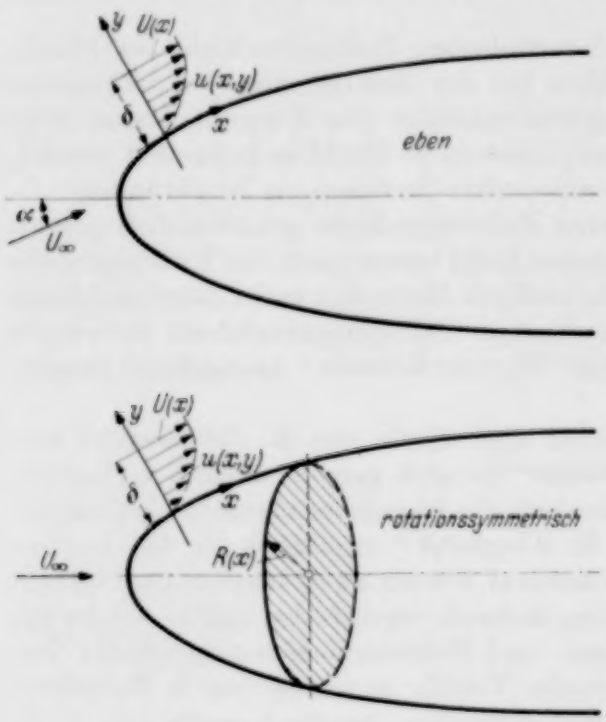

Abb. 1. Übersichtsskizze.

Wir nehmen an, daß im rotationssymmetrischen Fall der Körper- bzw. Rohrradius R gegenüber der Reibungsschichtdicke δ groß ist. Dann lauten die besagten Gleichungen

$$\varrho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial \tau}{\partial y}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial(\varrho u R)}{\partial x}+\frac{\partial(\varrho v R)}{\partial y}=0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}=-\varrho_a U\frac{dU}{dx}. \tag{3}$$

Hierin bedeuten u und v die Geschwindigkeitskomponenten innerhalb der Reibungsschicht

$$0\leq y\leq\delta$$

in x- und y-Richtung und U die Geschwindigkeit außerhalb der Reibungsschicht ($y\geq\delta$). Abb. 1. Hierbei ist p der über die Reibungsschichtdicke konstante Druck, τ die Schubspannung und ϱ die Dichte des strömenden Mediums. Für den ebenen Fall ist in (2) sowie auch in allen folgenden Formeln der Halbmesser R zu streichen.

Die zugehörigen Randbedingungen lauten:

$$\left.\begin{aligned} &y=0: u=0, \quad v=v_0, \quad \tau=\tau_0, \quad \varrho=\varrho_0,\\ &y=\delta: u=U, \quad\quad\quad \tau=0, \quad \varrho=\varrho_a. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Ist $v_0\neq 0$, so liegt der Fall der Absaugung ($v_0<0$) bzw. des Ausblasens ($v_0>0$) vor.

Die drei Gleichungen (1) bis (3) fassen wir jetzt noch zusammen, indem wir zu der mit u^r multiplizierten Gleichung (1) die mit $u^{r+1}/(r+1)R$ multiplizierte Gleichung (2) addieren, wobei $r=0, 1, 2\ldots$ beliebig gewählt werden kann. Es wird dann

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial x}(\varrho u^{r+2}R)+\frac{\partial}{\partial y}(\varrho u^{r+1}v)=(r+1)u^r\left(\varrho_a U\frac{dU}{dx}+\frac{\partial\tau}{\partial y}\right). \tag{5}$$

Die Kontinuitätsgleichung (2) integrieren wir über den Wandabstand y und erhalten

$$\varrho v=-\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^y\varrho u R\,dy+\varrho_0 v_0. \tag{6}$$

[1] *H. C. Garner*, The development of turbulent boundary layers. ARC-Rep. No. 2133 (1944).
[2] *C. B. Millikan*, Trans. Am. Soc. Mech. Eng., Appl. Mech. 54 (1932), No. 2, S. 29.
[3] *H. Ludwieg* u. *W. Tillmann*, Ing.-Arch. 17 (1949), S. 288.
[4] *J. Rotta*, Ing.-Arch. 19 (1951), S. 31 und 20 (1952), S. 195.

Nehmen wir jetzt an, daß uns die Geschwindigkeitsverteilung $u(y)$ und die Schubspannungsverteilung $\tau(y)$ in y-Richtung bekannt sind, dann können wir (5) über y von $y=0$ bis $y=\delta$ integrieren. Wir erhalten dann, wenn wir noch (6) einsetzen,

$$\frac{1}{\varrho_a U^{r+2} R}\frac{d}{dx}\left(\varrho_a U^{r+2} R f_r\right) + \frac{g_r}{U}\frac{dU}{dx} - \frac{\varrho_0}{\varrho_a}\frac{v_0}{U} = e_r\,. \tag{7}$$

Hierin bedeuten die neu eingeführten Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} f_r &= \int_0^\delta \frac{\varrho}{\varrho_a}\frac{u}{U}\left[1-\left(\frac{u}{U}\right)^{r+1}\right]dy\,,\\ g_r &= -(r+1)\int_0^\delta \frac{u}{U}\left[\frac{\varrho}{\varrho_a}-\left(\frac{u}{U}\right)^{r-1}\right]dy\,,\\ e_r &= -(r+1)\int_0^\delta \left(\frac{u}{U}\right)^r \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\tau}{\varrho_a U^2}\right)dy\,. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Gleichung (7) gilt ganz allgemein für laminare und turbulente, inkompressible und kompressible, ebene und rotationssymmetrische Strömung mit und ohne Absaugung bzw. Ausblasen. Wie bereits gesagt, ist im ebenen Fall der Radius R zu streichen.

Setzt man $r=0$, dann ergibt sich die bekannte *v. Kármán*sche Impulsgleichung. *K. Wieghardt* [1] und *J. Rotta* [2] haben gezeigt, daß man (7) auch für $r=1$ eine physikalische Deutung geben kann, nämlich die der Energiegleichung. Wir wollen jetzt annehmen, daß das strömende Mittel inkompressibel sei, $\varrho=$ konst, außerdem sei weder Absaugung noch Ausblasen vorhanden, $v_0=0$. Dann wird

$r=0$: Impulssatz (*v. Kármán, Pohlhausen*).

$$\frac{1}{U^2 R}\frac{d}{dx}\left(U^2 R\vartheta\right) + \frac{\delta^*}{U}\frac{dU}{dx} = \frac{\tau_0}{\varrho U^2}\,, \tag{9}$$

mit

$$\vartheta = f_0 = \int_0^\delta \frac{u}{U}\left[1-\frac{u}{U}\right]dy \qquad \text{als Impulsverlustdicke,} \tag{10}$$

$$\delta^* = g_0 = \int_0^\delta \left[1-\frac{u}{U}\right]dy \qquad \text{als Verdrängungsdicke,} \tag{11}$$

$$\frac{\tau_0}{\varrho U^2} = e_0 \qquad \text{als Wandschubspannung.}$$

$r=1$: Energiesatz (*Wieghardt, Rotta*).

$$\frac{1}{U^3 R}\frac{d}{dx}\left(U^3 R\bar{\delta}\right) = 2\frac{d+t}{\varrho U^3} \tag{12}$$

mit

$$\bar{\delta} = f_1 = \int_0^\delta \frac{u}{U}\left[1-\left(\frac{u}{U}\right)^2\right]dy \qquad \text{als Energieverlustdicke,} \tag{13}$$

$$\frac{d+t}{\varrho U^3} = \frac{e_1}{2} = \int_0^\delta \frac{\tau}{\varrho U^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{U}\right)dy \qquad \text{als Schubspannungsarbeit [3].} \tag{14}$$

Die Schubspannungsarbeit ist im laminaren Fall gleich der in Wärme umgewandelten Energie (Dissipation d). Bei turbulenten Strömungen wird nicht alle Energie in Wärme umgewandelt;

[1] Siehe Fußnote 4 auf Seite 211.
[2] Siehe Fußnote 4 auf Seite 212.
[3] Diese Gleichung wird durch partielle Integration aus (8) gewonnen.

es verbleibt noch ein Teil als Turbulenzenergie (t), der allerdings meistens vernachlässigbar klein ist. Wichtig ist die Tatsache, daß im Fall $r = 1$ das zweite Glied auf der linken Seite von (7) verschwindet, da ja bei Annahme konstanter Dichte $g_1 = 0$ ist.

Führen wir jetzt die Reibungsschichtdickenverhältnisse

$$H = \frac{\delta^*}{\vartheta} \qquad \text{und} \qquad \bar{H} = \frac{\bar{\delta}}{\vartheta} \tag{15}$$

ein, dann können wir für (9) und (12) auch schreiben

$$\frac{1}{U^2 R}\frac{d}{dx}(U^2 R \vartheta) + H\frac{\vartheta}{U}\frac{dU}{dx} = \frac{\tau_0}{\varrho U^2}, \tag{16}$$

$$\frac{1}{U^3 R}\frac{d}{dx}(U^3 R \bar{H}\vartheta) = 2\frac{d+t}{\varrho U^3}. \tag{17}$$

Wir subtrahieren (16) von (17) und finden [1]

$$\vartheta\frac{d\bar{H}}{dx} = (H-1)\bar{H}\frac{\vartheta}{U}\frac{dU}{dx} + 2\frac{d+t}{\varrho U^3} - \bar{H}\frac{\tau_0}{\varrho U^2}. \tag{18}$$

Wie im folgenden Abschnitt gezeigt wird, lassen sich die Schubspannung $\tau_0/\varrho U^2$ und die Schubspannungsarbeit $(d+t)/\varrho U^3$ als Funktionen der dimensionslosen Größen $U\vartheta/\nu$ (mit der Impulsdicke gebildete *Reynolds*sche Zahl) und H ausdrücken. Weiterhin gilt in guter Näherung Einparametrigkeit für die Geschwindigkeitsverteilungen in der Reibungsschicht; d. h. es besteht ein fester Zusammenhang zwischen den Reibungsschichtdickenverhältnissen H und $\bar{H}$. Unter Beachtung dieser Tatsachen stellen die Gleichungen (17) und (18) zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten ϑ und $\bar{H}$ dar.

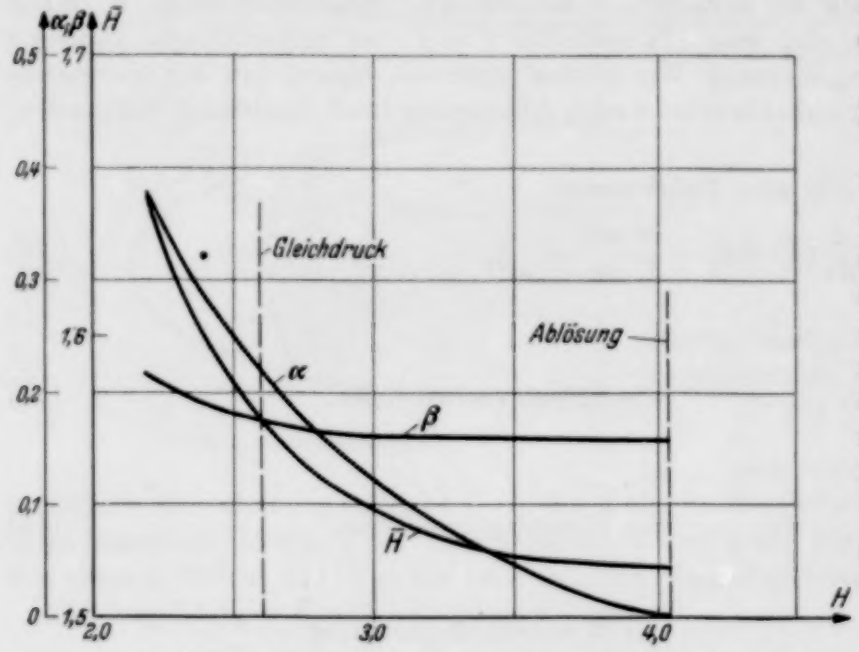

Abb. 2. Laminare Reibungsschichtgrößen (*Hartree*-Profile).

Im Gegensatz zu den bisherigen Verfahren wollen wir die Impulsverlustdicke nicht aus dem Impulssatz (16) sondern aus dem Energiesatz (17) berechnen. Dieses hat für die Ausführung der im Abschnitt 4 angegebenen Integrationen entscheidende Vorteile. Den Impulssatz nehmen wir in Verbindung mit dem Energiesatz zu Hilfe, um den das Geschwindigkeitsprofil kennzeichnenden Parameter $\bar{H}$ zu berechnen, Gleichung (18).

3. Die Schubspannung, die Schubspannungsarbeit und das Reibungsschichtdickenverhältnis. Um mit den Gleichungen (17) und (18) arbeiten zu können, muß die Abhängigkeit der Schubspannung und der Schubspannungsarbeit von den Größen $U\vartheta/\nu$ und H bekannt sein, außerdem muß man den Zusammenhang $\bar{H}(H)$ kennen.

a) Laminare Strömung. Unter der Annahme der Einparametrigkeit für die Geschwindigkeitsverteilung können wir schreiben

$$\frac{u}{U} = f\left(\frac{y}{\vartheta}, H\right),$$

woraus dann folgt

$$\frac{\tau_0}{\varrho U^2} = \frac{\alpha_l(H)}{\frac{U\vartheta}{\nu}} \qquad \text{mit} \qquad \alpha_l = \left(\frac{\partial\frac{u}{U}}{\partial\frac{y}{\vartheta}}\right)_0, \tag{19}$$

[1] Für den laminaren Fall wird eine entsprechende Formel bereits von *A. Walz* (Fußnote 5 auf Seite 211) angegeben. Auch im turbulenten Fall kann man zeigen, daß die von *E. Gruschwitz*, *A. E. v. Doenhoff* und *N. Tetervin* sowie *H. C. Garner* angegebenen empirischen Gleichungen zur Berechnung des Formparameters des Geschwindigkeitsprofiles (bei *Gruschwitz* $\eta = 1 - (u_\vartheta/U)^2$, bei den anderen H) im Aufbau der Gleichung (18) sehr ähnlich sind.

$$\frac{d}{\varrho\, U^3} = \frac{\beta_l(H)}{\frac{U\,\vartheta}{\nu}} \qquad \text{mit} \qquad \beta_l = \int_0^{\delta/\vartheta} \left(\frac{\partial \frac{u}{U}}{\partial \frac{y}{\vartheta}} \right)^2 d\frac{y}{\vartheta}, \tag{20}$$

und

$$H = \int_0^{\delta/\vartheta} \left[1 - \frac{u}{U} \right] d\frac{y}{\vartheta}\,; \qquad \overline{H} = \int_0^{\delta/\vartheta} \frac{u}{U} \left[1 - \left(\frac{u}{U} \right)^2 \right] d\frac{y}{\vartheta}\,. \tag{21}$$

Wir wählen für die Auswertung dieser Formeln die sogenannten *Hartree*-Profile; das sind die exakten Profile für den Geschwindigkeitsverlauf $U \sim x^m$. In Abb. 2 haben wir die Größen α, β, $\overline{H}$ über H dargestellt [1]. Interessant ist, daß β nahezu von H unabhängig ist. Für den Fall ohne Druckgradient gilt $\alpha = 0{,}220$, $\beta = 0{,}173$ und $H = 2{,}60$.

b) Turbulente Strömung. Mit der Bestimmung der Wandschubspannung bei turbulenten Reibungsschichten mit Druckgradienten haben sich neuerdings *H. Ludwieg* und *W. Tillmann* sowie *J. Rotta* [2] eingehend befaßt.

Für den Bereich der *Reynolds*schen Zahlen $1 \cdot 10^3 < U\vartheta/\nu < 4 \cdot 10^4$ geben *Ludwieg-Tillmann* die folgende Interpolationsformel an:

$$\frac{\tau_0}{\varrho\, U^2} = \frac{0{,}123}{\left(\frac{U\,\vartheta}{\nu}\right)^{0{,}268}}\, 10^{-0{,}678\,H}. \tag{22}$$

Rotta findet für die Wandschubspannung die Beziehung

$$\frac{U}{u^*} = \frac{1}{\varkappa} \ln\left(H \frac{U\,\vartheta}{\nu} \right) + B\,. \tag{23}$$

Hierin bedeutet $u^* = \sqrt{\tau_0/\varrho}$ die Schubspannungsgeschwindigkeit. Es gilt somit

$$\frac{\tau_0}{\varrho\, U^2} = \left(\frac{u^*}{U} \right)^2. \tag{24}$$

In (23) ist $1/\varkappa = 2{,}5$ und $B = B(I_1)$ eine Funktion der Größe $I_1 = \frac{H-1}{H} \frac{U}{u^*}$. Die Funktion B wurde von *Rotta* ausgewertet und graphisch dargestellt.

Wir haben die Schubspannungswerte für verschiedene Werte von H berechnet und in Abb. 3 über der *Reynolds*schen Zahl $U\vartheta/\nu$ aufgetragen. Die Übereinstimmung zwischen den Werten nach *Ludwieg-Tillmann* und *Rotta* ist recht befriedigend.

Mit der Berechnung der Schubspannungsarbeit (Dissipation und Turbulenzenergie) hat sich ebenfalls *J. Rotta* befaßt. Für die Dissipation gilt

$$\frac{d}{\varrho\, U^3} = \left(\frac{u^*}{U} \right)^3 \left[\frac{1}{\varkappa} \ln\left(H \frac{U\,\vartheta}{\nu} \right) + G \right]. \tag{25}$$

Die hierin auftretende Funktion $G = G(I_1)$ ist von *Rotta* ausgewertet worden. Unter Beachtung von (23) können wir für (25) auch schreiben

$$\frac{d}{\varrho\, U^3} = \left(\frac{u^*}{U} \right)^2 \left[1 + \frac{u^*}{U} (G - B) \right]. \tag{25 a}$$

Da $\frac{u^*}{U} = f\left(\frac{U\,\vartheta}{\nu}, H \right)$, sowie $I_1 = \frac{H-1}{H} \frac{U}{u^*}$ ist, läßt sich die Dissipation ebenfalls als Funktion der *Reynolds*schen Zahl $U\vartheta/\nu$ und des Formparameters H darstellen, was in Abb. 4 geschehen ist. Es zeigt sich, daß die Unterschiede bei verschiedenen Werten H nur gering sind, während sie bei der Wandschubspannung sehr erheblich sind. Aus Abb. 4 entnehmen wir, daß sich die

---

[1] Wir haben die Zahlenwerte von *A. Walz* (Fußnote 5 auf Seite 211) übernommen. Und zwar gelten folgende Identitäten: $\alpha_1 \equiv \varepsilon^*$, $\beta_l \equiv D^*$ und $\overline{H} \equiv H_{32}$.

[2] Siehe Fußnote 3 und 4 auf Seite 212.

Dissipation durch den Ansatz

$$\frac{d}{\varrho\, U^3} = \frac{\beta_t(H)}{\left(\frac{U\,\vartheta}{\nu}\right)^n} \tag{26}$$

annähern läßt. Ein brauchbarer Wert für n ist $n = 1/6$. Die Abhängigkeit des Wertes β_t von H ist nur gering, so daß wir dafür den konstanten Wert $\beta = 0{,}56 \cdot 10^{-2}$ annehmen können.

Zur Berechnung der Turbulenzenergie gibt *J. Rotta* eine Näherungsformel an. An Hand dieser Formel kann man zeigen, daß die Turbulenzenergie gegenüber der Dissipation vernachlässigbar klein ist, eine Tatsache, auf die bereits *Rotta* hingewiesen hat. Wir setzen also für unsere weiteren

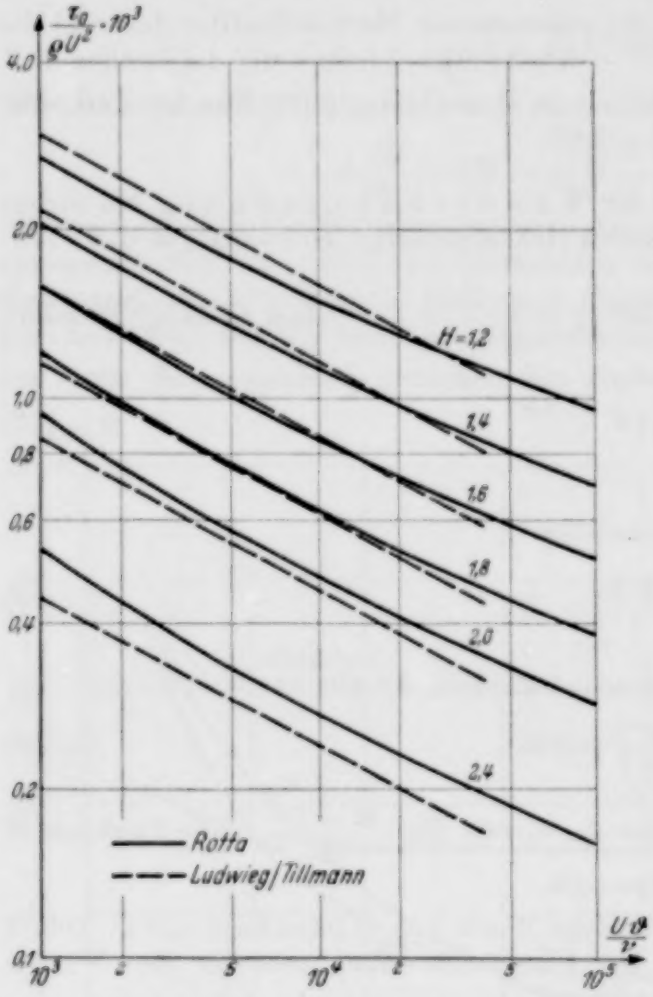

Abb. 3. Turbulente Wandschubspannung (nach *H. Ludwieg, W. Tillmann* und *J. Rotta*).

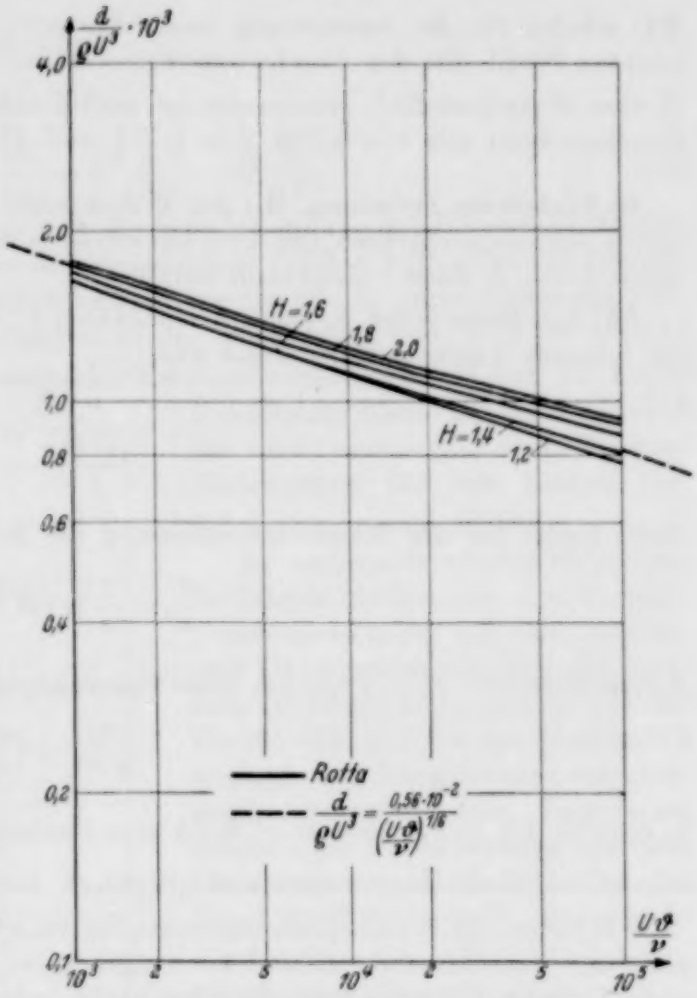

Abb. 4. Turbulente Dissipation (nach *J. Rotta*).

Rechnungen

$$\frac{t}{\varrho\, U^3} = 0\,. \tag{27}$$

Das Reibungsschichtdickenverhältnis $\bar{H}$ (Energieverlustdicke/Impulsverlustdicke) können wir ebenfalls aus den Ergebnissen von *J. Rotta* bestimmen. Es gilt

$$\bar{H} = 3 - H + \frac{I_2}{I_1^2}\,\frac{(H-1)^2}{H}\,. \tag{28}$$

Hierin ist I_2 ein Formparameter, der mit I_1 in einem festen Zusammenhang steht, der von *Rotta* angegeben worden ist. Wir haben nach (28) die Werte $\bar{H}$ in Abhängigkeit von der Größe H, sowie von der *Reynolds*schen Zahl $U\vartheta/\nu$ berechnet. Dabei zeigt sich, daß der Einfluß der *Reynolds*schen Zahl verschwindend ist. Das Ergebnis unserer Rechnung haben wir in Abb. 5 dargestellt. Auch *K. Wieghardt*[1] hat sich mit dem Zusammenhang $\bar{H}(H)$ beschäftigt. Er findet

$$\bar{H} = \frac{A\,H}{H - B} \qquad \text{mit} \qquad A = 1{,}269 \qquad \text{und} \qquad B = 0{,}379\,. \tag{29}$$

[1] *K. Wieghardt*, Zur turbulenten Reibungsschicht bei Druckanstieg. Untersuchungen und Mitteilungen der deutschen Luftfahrtforschung, UM 6617 (1944).

Die sich hieraus ergebende Kurve haben wir ebenfalls in Abb. 5 eingetragen. Bis auf die größeren Werte von H ist die Übereinstimmung mit den Kurven von *Rotta* gut.

4. Das Näherungsverfahren. Als Ergebnis des vorigen Abschnittes wollen wir zusammenfassen: Es gelten die Darstellungen

$$\frac{\tau_0}{\varrho U^2} = f\left(\frac{U\vartheta}{\nu}, H\right), \quad \frac{d+t}{\varrho U^3} = \frac{d}{\varrho U^3} = g\left(\frac{U\vartheta}{\nu}, H\right) \quad \text{und} \quad \bar{H} = h(H),$$

welche in Abb. 2 bis 5 angegeben sind. Im laminaren Fall sind die Werte $\tau_0/\varrho U^2$ und $d/\varrho U^3$ umgekehrt proportional der *Reynolds*schen Zahl.

a) Die Berechnung der Impulsverlustdicke. Wie bereits oben erwähnt, wollen wir die Impulsverlustdicke aus dem Energiesatz (17) ermitteln.

Wir schreiben für die Schubspannungsarbeit nach (20), (26) und (27)

$$\frac{d+t}{\varrho U^3} = \frac{\beta(H)}{\left(\frac{U\vartheta}{\nu}\right)^n}, \qquad (30)$$

wobei für den laminaren Fall $n = 1$ und für den turbulenten Fall $n = 1/6$ gilt.

Diesen Ausdruck setzen wir jetzt in (17) ein und erhalten mit

$$\chi = U^{3+2n} R^{1+n} \bar{H}^{1+n} \left(\frac{U\vartheta}{\nu}\right)^n \vartheta, \qquad (31)$$

$$\frac{d\chi}{dx} = 2(1+n)\beta(H)\, \bar{H}^n U^{3+2n} R^{1+n}. \qquad (32)$$

Nehmen wir jetzt an, daß H von x und durch den eindeutigen Zusammenhang $\bar{H}(H)$ auch $\bar{H}$ bekannt seien, dann läßt sich (32) über x integrieren, und es ergibt sich, wenn wir noch die Größe

$$\Theta = \left(\frac{U\vartheta}{\nu}\right)^n \vartheta \qquad (33)$$

einführen, unter Beachtung von (31)

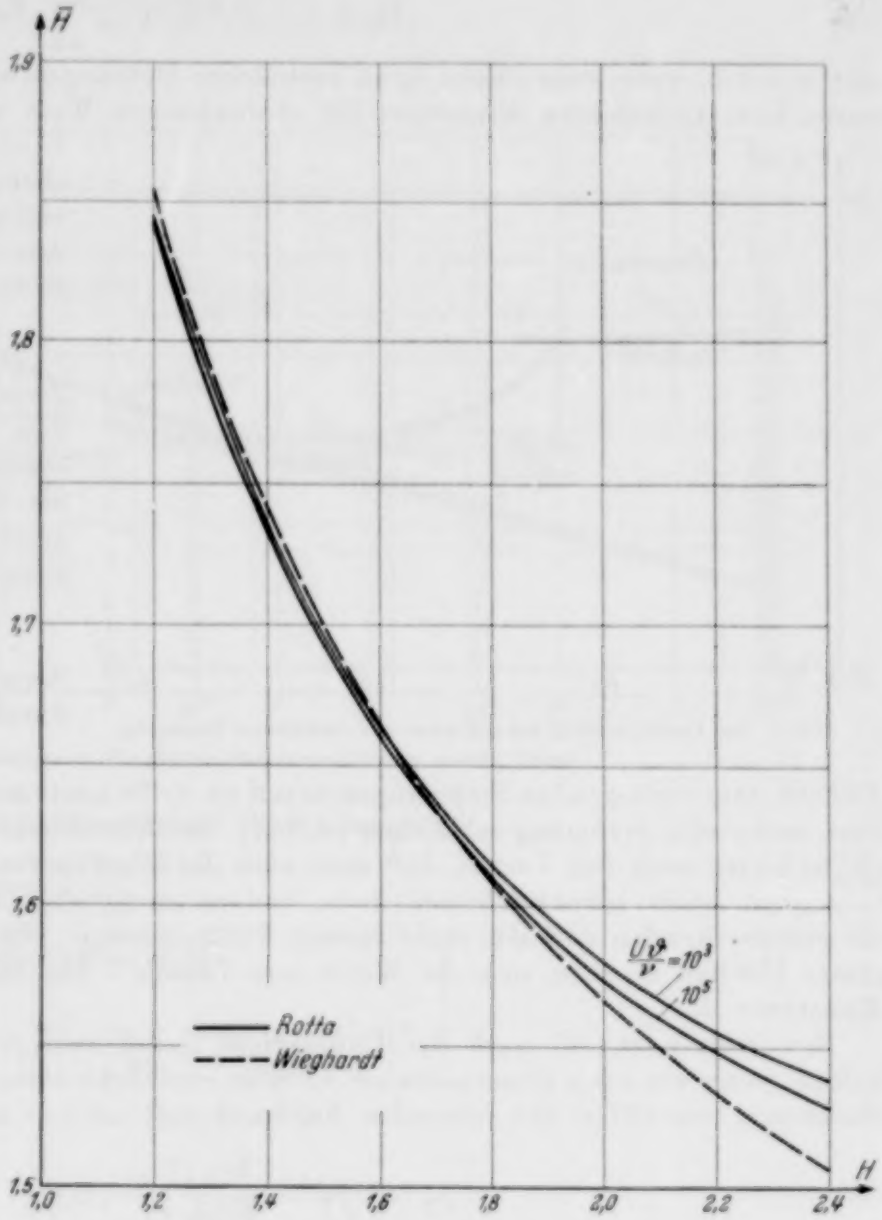

Abb. 5. Turbulentes Reibungsschichtdickenverhältnis (nach *J. Rotta* und *K. Wieghardt*).

$$\Theta(x) = \frac{\chi_1 + \int_{x_1}^{x} E(H)\, U^{3+2n} R^{1+n}\, dx'}{\bar{H}(x)^{1+n} U(x)^{3+2n} R(x)^{1+n}}. \qquad (34)$$

Als neue Abkürzung haben wir eingeführt

$$E(H) = 2(1+n)\beta(H)\, \bar{H}^n. \qquad (35)$$

Diese Funktion haben wir für die beiden Fälle laminarer und turbulenter Strömung in Abb. 6 aufgetragen.

Näherungsweise wollen wir jetzt für $E(H)$ und $\bar{H}$ konstante Mittelwerte annehmen. Diese Annahme trifft besonders gut für den turbulenten Fall zu. Wir erhalten dann aus (34)

$$\Theta(x) = \left(\frac{U\,\vartheta}{\nu}\right)^n \vartheta = \frac{C_1 + A\int_{x_1}^{x} U^{3+2n} R^{1+n}\, dx'}{U^{3+2n} R^{1+n}}. \tag{36}$$

Hierin bedeutet

$$A = \frac{E}{H^{1+n}} = 2(1+n)\frac{\beta}{H} \tag{37}$$

einen für den Bereich $x_1 < x' < x$ brauchbaren Mittelwert.

Die Integrationskonstante bestimmt sich zu

$$C_1 = U_1^{3+2n} R_1^{1+n} \left(\frac{U_1\,\vartheta_1}{\nu}\right)^n \vartheta_1 \tag{38}$$

mit $n = 1/6$, wenn vom Punkt x_1 ab turbulente Reibungsschicht vorliegt. Wir wollen als laminaren bzw. turbulenten Mittelwert für A denjenigen Wert wählen, der sich ergibt, wenn wir $U = U_\infty$ konstant annehmen und die ebene Platte bei voll-laminarer bzw. voll-turbulenter Strömung betrachten. Aus (36) wird dann mit $x_1 = 0$ und $C_1 = 0$

$$\Theta_p = \left(\frac{U_\infty\,\vartheta_p}{\nu}\right)^n \vartheta_p = Ax\,. \tag{39}$$

Zwischen der Impulsverlustdicke $\vartheta_p(l)$ und dem Widerstandsbeiwert c_f einer einseitig benetzten Platte der Länge l, die mit der Geschwindigkeit U_∞ angeströmt wird, besteht der Zusammenhang

$$\frac{\vartheta_p(l)}{l} = \frac{c_f}{2}. \tag{40}$$

Setzen wir in (39) $x = l$, dann folgt durch Vergleich von (39) und (40)

$$A = \left(\frac{U_\infty\, l}{\nu}\right)^n \left(\frac{c_f}{2}\right)^{1+n}. \tag{37 a}$$

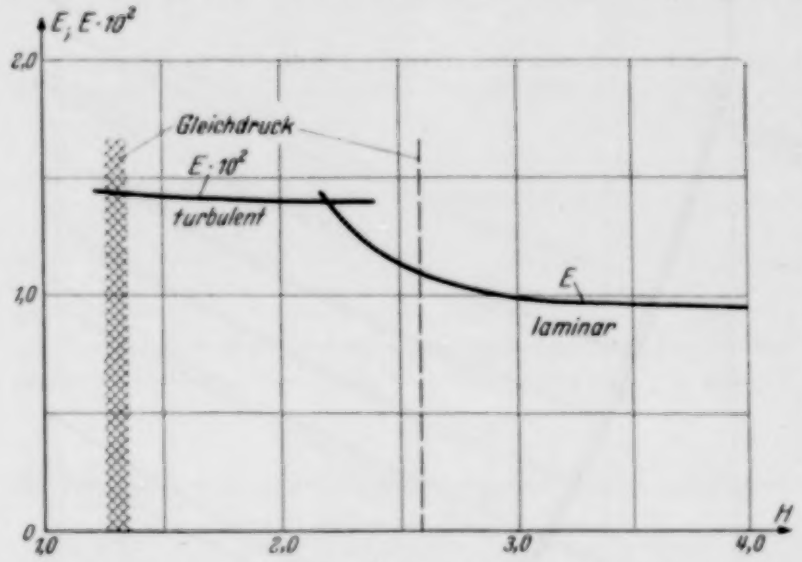

Abb. 6. Die Funktion $E(H)$ bei laminarer und turbulenter Strömung.

Je nach dem vorliegenden Strömungszustand ist c_f für laminare bzw. turbulente Strömung zu nehmen (Abb. 7). Die Schreibweise (37 a) bietet noch den Vorteil, daß man auch die Oberflächenrauhigkeit leicht berücksichtigen kann, indem man lediglich die entsprechenden c_f-Werte einer rauhen Platte einsetzt. Für glatte Flächen ergeben sich die Werte von Tabelle 1 für die Konstante A.

Tabelle 1. *Die Größen n und A bei laminarer und turbulenter Strömung.*

	laminar (Blasius)	turbulent (Falkner)[1]
n	1	$\frac{1}{6}$
A	0,441	$0{,}760 \cdot 10^{-2}$

Wir lösen jetzt (36) nach der Impulsdicke ϑ auf und erhalten, wenn wir noch dimensionslose Größen einführen unter Beachtung von (37 a) den folgenden Ausdruck:

$$\frac{\vartheta(x)}{l} = \frac{\left[C_1^* + \left(\frac{c_f}{2}\right)^{1+n} \int_{x_1/l}^{x/l} \left(\frac{U}{U_\infty}\right)^{3+2n} \left(\frac{R}{l}\right)^{1+n} d\,\frac{x'}{l}\right]^{\frac{1}{1+n}}}{\left(\frac{U}{U_\infty}\right)^3 \frac{R}{l}}. \tag{41}$$

Die Integrationskonstante bestimmt sich zu

$$C_1^* = \left[\left(\frac{U_1}{U_\infty}\right)^3 \frac{R_1}{l}\frac{\vartheta_1}{l}\right]^{1+n} = \left[\frac{c_f\, l}{2}\left(\int_0^{x_1/l} \left(\frac{U}{U_\infty}\right)^5 \left(\frac{R}{l}\right)^2 d\,\frac{x'}{l}\right)^{1/2}\right]^{1+n}. \tag{42}$$

Zusammenfassend wiederholen wir noch einmal: Ist die Strömung vom Anfangspunkt $x_1 = 0$ an voll-laminar bzw. voll-turbulent, dann ist $C_1^* = 0$. Es sind jeweils die laminaren bzw. turbulenten

[1] *V. M. Falkner*, Aircraft Engineering, 15, (1943), S. 65. Es gilt: $c_f = \frac{0{,}0306}{\left(\frac{U_\infty\, l}{\nu}\right)^{1/7}}$.

Widerstandsbeiwerte einzusetzen. Geht der turbulenten Reibungsschicht eine laminare Vorstrecke voraus, dann ist der Wert für ϑ in (42) der laminaren Rechnung zu entnehmen (zweite Formel in (42)). Für den laminaren Fall gilt $n = 1$, für den turbulenten Fall $n = 1/6$. Der ebene Fall ergibt sich, wenn man in (41) und (42) den Radius R streicht. Wie man aus (41) ersieht, spielt die Größe n im turbulenten Fall keine besondere Rolle, so daß man für überschlägige Rechnungen auch $n = 0$ annehmen darf.

b) Die Berechnung des Formparameters. Den das Geschwindigkeitsprofil in der Reibungsschicht kennzeichnenden Formparameter $\bar{H}$ wollen wir aus Gleichung (18) bestimmen, die wir wie folgt schreiben:

$$\Theta(x)\frac{d\bar{H}}{dx} = F(\bar{H})\,\Gamma(x) + G(\bar{H})\,. \tag{43}$$

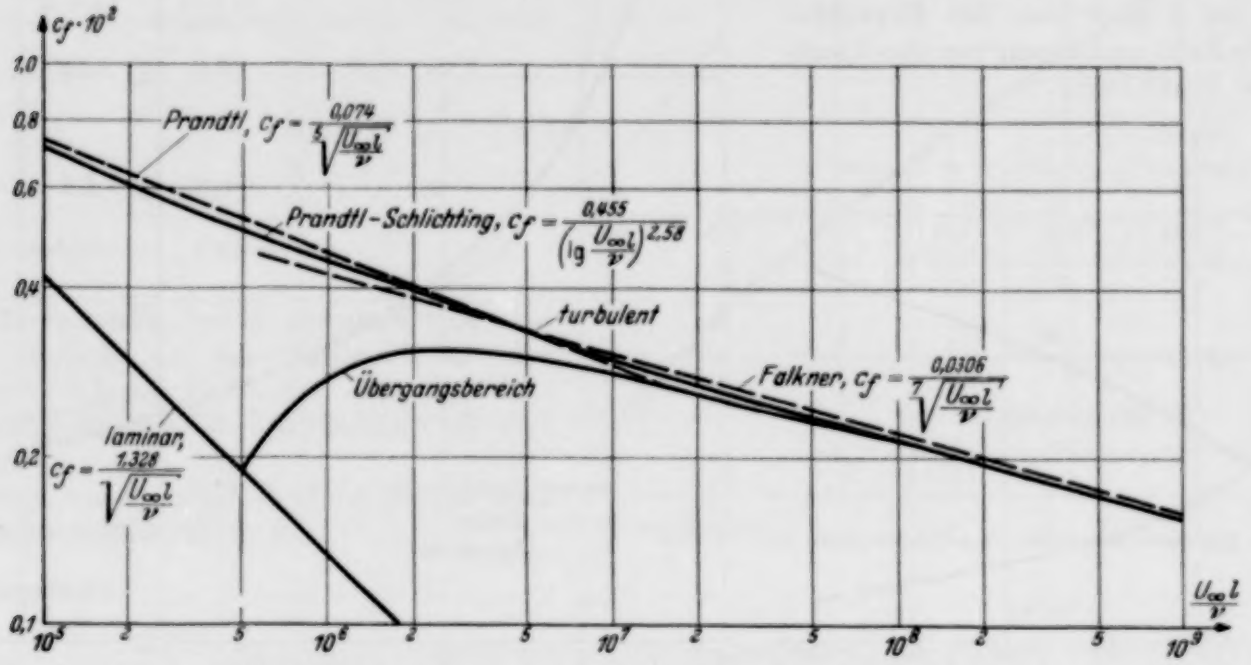

Abb. 7. Widerstandsgesetz der glatten längsangeströmten ebenen Platte.

Hier ist Θ nach (33) gegeben. Für die anderen Abkürzungen gilt

$$\Gamma(x) = \frac{\Theta}{U}\frac{dU}{dx}\,, \tag{44}$$

und

$$\left.\begin{aligned} F(\bar{H}) &= (H-1)\,\bar{H} \\ G(\bar{H}) &= \left(2\,\frac{d+t}{\varrho\,U^3} - \bar{H}\,\frac{\tau_0}{\varrho\,U^2}\right)\left(\frac{U\,\vartheta}{\nu}\right)^n . \end{aligned}\right| \tag{45}$$

Wir formen (43) noch um, indem wir die Substitution

$$L(\bar{H}) = \int \frac{d\bar{H}}{F(\bar{H})} = L(H) \tag{46}$$

und die Abkürzung

$$K(\bar{H}) = -\frac{G(\bar{H})}{F(\bar{H})} = K(L) \tag{47}$$

einführen. Dann erhalten wir eine Differentialgleichung für den neuen Formparameter L

$$\Theta(x)\frac{dL}{dx} = \Gamma(x) - K(L)\,. \tag{48}$$

Durch graphische Integration der Funktion $1/F(\bar{H})$ über $\bar{H}$ haben wir die Größe L bestimmt. Den Wert $L = 0$ haben wir in den Bereich verschwindenden Druckgradienten (Gleichdruck, ebene Platte) gelegt. In den Abb. 8 und 9 haben wir die Abhängigkeit $H(L)$, sowie für den laminaren Fall auch $\alpha(L)$ und in den Abb. 10 und 11 die Abhängigkeit $K(L)$ für die Fälle laminarer und turbulenter Strömung dargestellt. Während für die Funktion $K(L)$ im laminaren Fall kein

Einfluß der *Reynolds*schen Zahl besteht, ist dieser für den turbulenten Fall recht beträchtlich. Man kann zeigen, daß man den bei *E. Gruschwitz*, *A. Kehl* und *H. C. Garner* auftretenden Gleichungen zur Berechnung des Formparameters die Form unserer Gleichung (48) geben kann[1]. Die daraus folgenden Zusammenhänge für $H(L)$ und $K(L)$ haben wir in oben bezeichneten Abbildungen miteingetragen. Die Unterschiede zwischen den einzelnen Verfahren beruhen also auf den Abweichungen der Kurven $H(L)$ und $K(L)$.

Zur Lösung von (48) machen wir für $K(L)$ einen linearen Ansatz (vgl. hierzu die Abb. 10 und 11):

$$K(L) = a(L - b)\,. \qquad (49)$$

Die Größen a und b ergeben sich etwa nach Tabelle 2. Im turbulenten Fall ist b noch von der *Reynolds*schen Zahl und damit von der Lauflänge x abhängig.

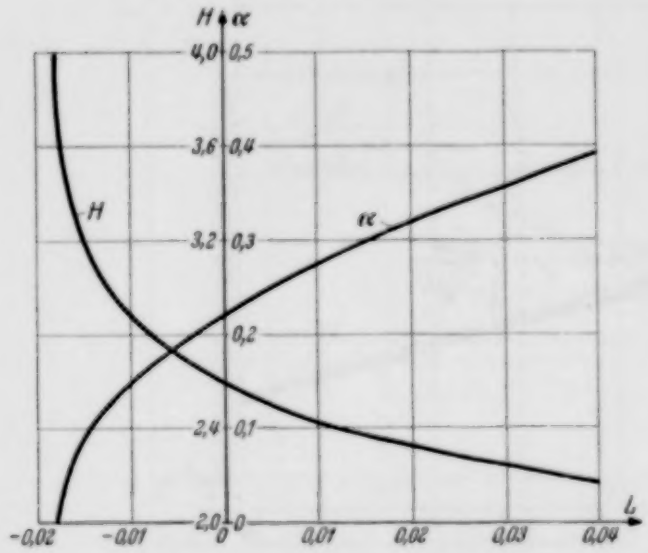

Abb. 8. Zusammenhang zwischen dem Reibungsschichtdickenverhältnis H, sowie dem Wandschubspannungsbeiwert Λ und dem Formparameter L bei laminarer Strömung.

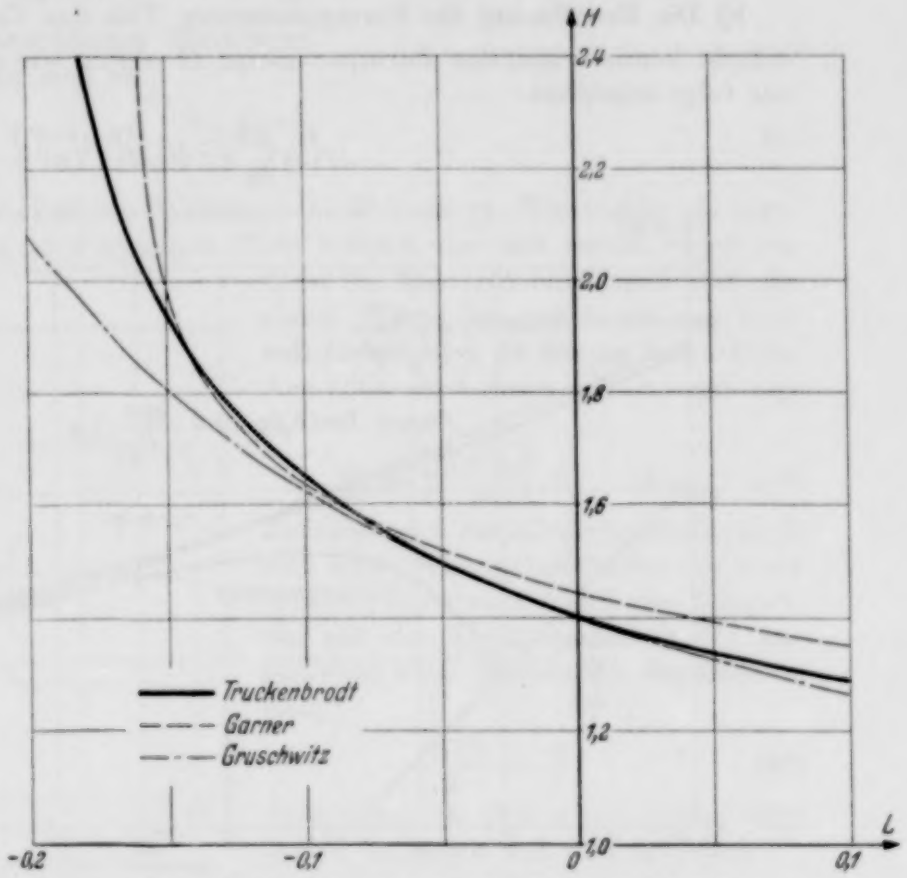

Abb. 9. Zusammenhang zwischen dem Reibungsschichtdickenverhältnis H und dem Formparameter L bei turbulenter Strömung.

Setzen wir (49) in (48) ein, so erhalten wir eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung für L, die wir geschlossen lösen können. Zu diesem Zweck machen wir die Substitution

$$\xi = e^{a\int \frac{dx}{\Theta(x)}} = \left(C_1 + A\int_{x_1}^{x} U^{3+2n} R^{1+n}\, dx'\right)^{\frac{a}{A}}\,. \qquad (50)$$

Die letzte Beziehung folgt aus der Tatsache, daß in der Formel (36) für Θ der Nenner gerade die mit $1/A$ multiplizierte Ableitung des Zählers ist. Die Zahlenwerte a/A für glatte Flächen sind in Tabelle 2 miteingetragen.

Ohne im einzelnen auf die Zwischenrechnung einzugehen, bei der wir noch eine partielle Integration vornehmen, derart, daß die Ableitung $dU/d\xi$ nicht mehr vorkommt, finden wir schließlich

$$L = \frac{\xi_1}{\xi} L_1 + \ln\frac{U(\xi)}{U_1} + \frac{1}{\xi}\int_{\xi_1}^{\xi}\left[b(\xi') - \ln\frac{U(\xi')}{U_1}\right] d\xi'\,. \qquad (51)$$

Im Anfangspunkt $x_1 = 0$ ist auch $\xi_1 = 0$. Es verschwindet dann das erste Glied in (51). Speziell für den laminaren Fall gilt mit $b = 0$ der einfache Ausdruck

$$L = -\int_0^1 \ln\frac{U(\xi')}{U(\xi)}\, d\,\frac{\xi'}{\xi}\,. \qquad (52)$$

[1] Ein ausführlicher Vergleich der einzelnen Verfahren untereinander ist in einem unveröffentlichten Bericht des Verfassers durchgeführt worden.

Über die Anfangswerte für L im Staupunkt $x_1 = 0$ sowie im Umschlagspunkt wird noch berichtet werden.

Wie man aus (51) ersieht, kann die neue Veränderliche ξ mit einem beliebigen Faktor versehen werden, ohne daß sich dadurch L ändert. Wir können dafür also auch schreiben

$$\xi = \left[C_1^* + \left(\frac{c_f}{2}\right)^{1+n} \int_{x_1/l}^{x/l} \left(\frac{U}{U_\infty}\right)^{3+2n} \left(\frac{R}{l}\right)^{1+n} d\frac{x'}{l} \right]^{\frac{a}{A}}. \tag{50a}$$

Tabelle 2. *Die Größen a, b und a/A bei laminarer und turbulenter Strömung.*

	laminar		turbulent
	$L > 0$ [1]	$L < 0$ [2]	
a	2,87	3,53	$3{,}04 \cdot 10^{-2}$
b	0		$0{,}07 \lg \frac{U\vartheta}{\nu} - 0{,}23$
$\frac{a}{A}$	6,5	8,0	4,0

[1] Druckabfall; [2] Druckanstieg.

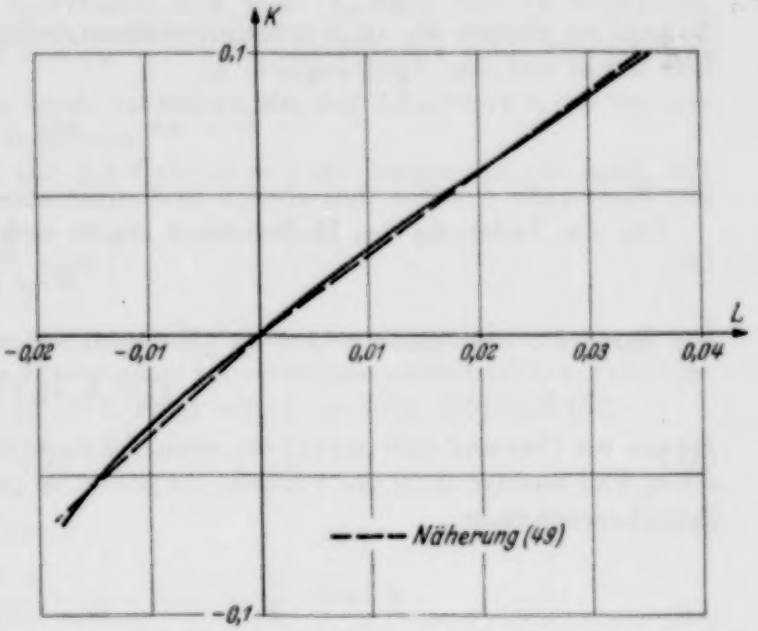

Abb. 10. Die Funktion $K(L)$ bei laminarer Strömung.

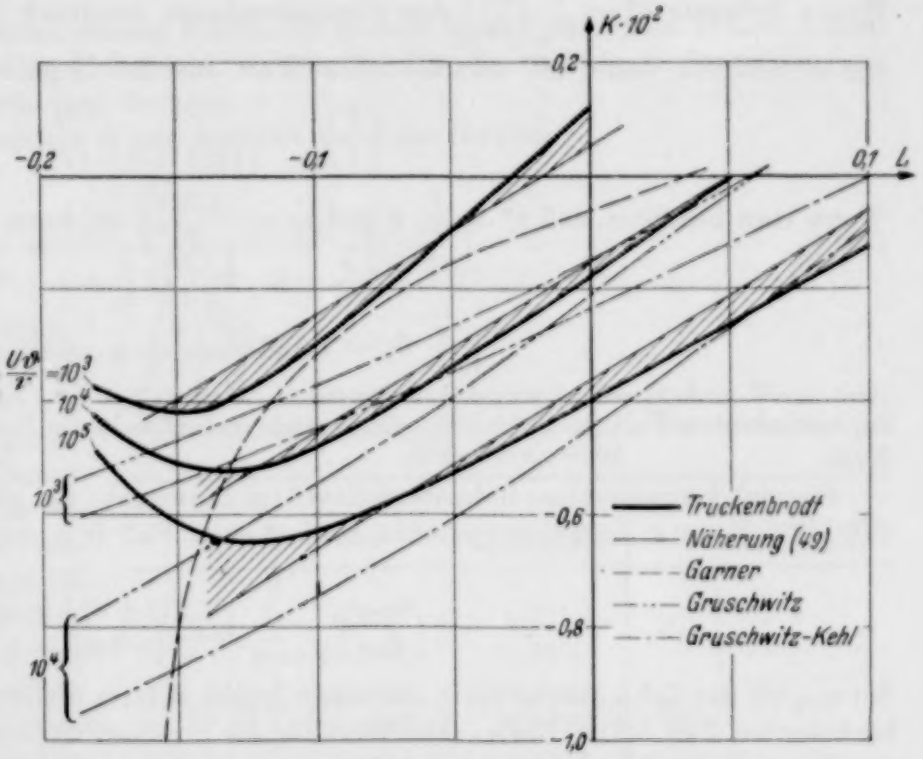

Abb. 11. Die Funktion $K(L)$ bei turbulenter Strömung.

Gegeben:

Allgemeine Größen

$$U(x),\ R(x),\ \frac{U_\infty l}{\nu},$$

Strömungszustand n, c_f, $\frac{a}{A}$, (laminar oder turbulent)

Anfangswerte U_1, R_1, ϑ_1, L_1.

Gesucht:

Impulsverlustdicke $\vartheta(x)$,

Formparameter L, $H(x)$.

Zuerst berechnet man nach (41) durch Ausführung einer einfachen Quadratur die Impulsverlustdicke. Hieraus bildet man, sofern man turbulente Strömungen zu berechnen hat, die *Reynolds*sche Zahl $U\vartheta/\nu$, mit der man dann nach Tabelle 2 die Größe b berechnet. Als nächstes bestimmt man nach (50 a) die neue Veränderliche ξ, über die man die Funktion $b - \ln U/U_1$ integriert. Nach (51) erhält man dann den Formparameter L und mittels Abb. 8 bzw. 9 das Reibungsschichtdickenverhältnis H. Wegen des großen Exponenten a/A in (50a) wächst die Größe ξ sehr rasch mit größer werdender Lauflänge x. Das bedeutet aber, daß das Glied $(\xi_1/\xi) L_1$ in (51) mit zunehmender Lauflänge immer mehr an Bedeutung verliert, womit gezeigt ist, daß der Anfangswert L_1 bei größeren Abständen x (z. B. in der Nähe des Ablösungspunktes) nur geringen Einfluß hat. Der Vorteil

unseres Verfahrens liegt nun darin, daß jeweils nur einfache Quadraturen auszuführen sind. Darüber hinaus kommen von den Ausgangswerten U und R keinerlei Ableitungen nach x vor.

c) Die Anfangswerte. Die Anfangswerte sowohl für die Impulsverlustdicke ϑ als auch den Formparameter L können je nach dem vorliegenden Fall verschieden sein.

1. Anströmen eines Körpers mit Staupunkt. Die Reibungsschichtrechnung wird im Staupunkt, $x_1 = 0$, begonnen. Dort ist $U = 0$ und $R = 0$. Aus (33) folgt dann sofort

$$\Theta_0 = 0. \tag{53}$$

Sowohl im ebenen als auch rotationssymmetrischen Fall ändert sich die Potentialgeschwindigkeit linear mit der Lauflänge, d. h.

$$U = c\,x \qquad \text{mit} \qquad c = \left(\frac{dU}{dx}\right)_0. \tag{54}$$

Die Konstante c ist für den ebenen und rotationssymmetrischen Fall voneinander verschieden.

Für die Änderung des Halbmessers ergibt sich ebenfalls eine Linearität in x, nämlich

$$R = x. \tag{55}$$

Die Integrationskonstante in (34), (36) und (41) verschwindet:

$$\chi_1 = C_1 = C_1^* = 0. \tag{56}$$

Setzen wir (54) und (55) in (41) ein, dann folgt, wenn wir alle Größen, die im rotationssymmetrischen Fall zusätzlich in die Formeln eingehen, in geschweifte Klammern $\{\}$ setzen, nach kurzer Zwischenrechnung:

$$x \to 0: \quad \frac{\vartheta}{l} = \frac{1}{2[2\,(2+n)+\{1+n\}]^{\frac{1}{1+n}}} \frac{c_f}{c^{*\frac{n}{1+n}}} \left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{1-n}{1+n}}. \tag{57}$$

Hierin bedeutet $c^* = \dfrac{l}{U_\infty}\left(\dfrac{dU}{dx}\right)_0$ den dimensionslosen Ausdruck für c. Im laminaren Fall ($n = 1$) ergibt sich ein von Null verschiedener Wert für die Impulsverlustdicke in Staupunktsnähe

$$\left(\frac{\vartheta}{l}\right)_0 = \frac{1}{2\sqrt{2(3+\{1\})}} \frac{c_f}{\sqrt{c^*}}. \tag{58}$$

Wenn man beachtet, daß $c^* = \dfrac{l}{U_\infty} c$ und $c_f = \dfrac{1{,}328}{\sqrt{\dfrac{U_\infty\, l}{\nu}}}$ ist, kann man für (58) auch noch schreiben

$$\sqrt{\frac{c}{\nu}}\,\vartheta_0 = 1{,}328 \frac{\sqrt{c^*}}{c_f}\left(\frac{\vartheta}{l}\right)_0 = \frac{0{,}470}{\sqrt{3+\{1\}}}. \tag{59}$$

Im turbulenten Fall ($n = 1/6$) hat die Impulsverlustdicke im Staupunkt selbst ($x = 0$) den Wert Null.

Für das Impulsverlustdickenverhältnis im Staupunkt bei gleichem Geschwindigkeitsanstieg $(dU/dx)_0$ im rotationssymmetrischen und ebenen Fall ($c = \text{konst}$) gilt dann

$$\left(\frac{\vartheta_{0\,rot}}{\vartheta_{0\,eb}}\right)_{c=\text{konst}} = \left(\frac{2(2+n)}{5+3n}\right)^{\frac{1}{1+n}}. \tag{60}$$

Setzen wir die Zahlenwerte für n ein, dann ergibt sich im laminaren Fall der Wert 0,867 und im turbulenten Fall 0,816. Der exakte Wert für die laminare Strömung, den man aus dem *Hartree*-Profil errechnen kann, beträgt 0,845.

Den Anfangswert des Formparameters L bestimmen wir nach (48), wenn wir darin nach (53) $\Theta_0 = 0$ setzen,

$$\Gamma_0 = K(L_0). \tag{61}$$

Den Wert Γ_0 erhalten wir aus der folgenden Grenzwertbestimmung:

$$\Gamma_0 = \lim_{x\to 0} \frac{\Theta}{U}\frac{dU}{dx} = \lim_{x\to 0}\frac{\Theta}{x} = \frac{A}{2(2+n)+\{1+n\}}. \tag{62}$$

Im laminaren Fall ergibt sich mit (59)

$$\Gamma_0 = \frac{c}{\nu}\,\vartheta_0^2 = \frac{0{,}220}{3+\{1\}}\,, \tag{62a}$$

und aus (49)

$$L_0 = \frac{K(L_0)}{a} = \frac{\Gamma_0}{a} = \frac{0{,}077}{3+\{1\}}\,^{1} \tag{63}$$

(siehe Tabelle 3). Zwar ergibt sich nach (62) im turbulenten Fall ein endlicher von Null verschiedener Wert für Γ_0, der uns aber nicht weiterhilft, den Wert L_0 nach (61) zu berechnen, da uns die Werte $K(L)$ für die *Reynolds*schen Zahlen $\frac{U\,\vartheta}{\nu} \to 0$ nicht bekannt sind. Da die Strömung im Staupunkt immer erst laminar sein wird, verweisen wir auf Abschnitt 4, c 3, wo wir über die Anfangswerte im Umschlagspunkt berichten.

Für die Änderung des Formparameters L mit der Lauflänge x im Staupunkt gilt noch, wie man aus (48) herleiten kann,

$$\left(\frac{dL}{dx}\right)_0 = 0\,. \tag{64}$$

2. Einströmen in einen Kanal. Die Reibungsschicht beginnt in einem Punkt $x_1 = x_k = 0$, wo die Geschwindigkeit, und ebenso auch der Halbmesser im rotationssymmetrischen Fall, eine endliche Größe haben. Da wieder $\chi_1 = C_1 = C_1^* = 0$, folgt sofort aus (34), (36) und (41)

$$\Theta_k = 0 \quad \text{und} \quad \vartheta_k = 0\,, \tag{65}$$

und aus (44), wenn $dU/dx \neq \infty$,

$$\Gamma_k = 0\,. \tag{66}$$

Der Formparameter folgt dann aus (48) zu

$$K(L_k) = 0\,. \tag{67}$$

Im laminaren Fall wird daraus

$$L_k = 0\,, \tag{68}$$

d. h. der Wert der längsangeströmten ebenen Platte. Es besteht kein Unterschied zwischen dem ebenen und rotationssymmetrischen Fall (siehe Tabelle 3). Für die turbulente Strömung gilt das bereits bei der Staupunktströmung Gesagte.

Die Änderung des Formparameters L mit x erhält man aus (48) zu

$$\left(\frac{dL}{dx}\right)_k = \frac{\left(\frac{1}{U}\frac{dU}{dx}\right)_k}{1+\frac{1}{A}\left(\frac{dK}{dL}\right)_k} = \frac{1}{1+\frac{a}{A}}\left(\frac{1}{U}\frac{dU}{dx}\right)_k\,. \tag{69}$$

Der Zahlenwert a/A ist aus Tabelle 2 zu entnehmen.

3. Umschlag laminar-turbulent. Nach einem gewissen Übergangsbereich geht die laminare Reibungsschicht an der Stelle $x_1 = x_u$ in die turbulente Schicht über. Aus der Theorie der Turbulenzentstehung, vgl. *H. Schlichting*[2], kann man in Übereinstimmung mit Messungen entnehmen, daß der Umschlag an Stellen liegt, die gegenüber dem Geschwindigkeitsmaximum etwas stromabwärts liegen. Da die Vorgänge im Übergangsgebiet noch nicht erforscht sind, ist die Bestimmung der für die turbulente Rechnung benötigten Anfangswerte für ϑ und H bzw. L nur annähernd möglich. Das Grundsätzliche unserer Überlegungen ist in Abb. 12 am Beispiel der ebenen Platte gezeigt. Bis zur Stelle x_u ist die Reibungsschicht laminar und folgt den Gesetz-

Tabelle 3. *Laminare Anfangswerte. Die exakten Werte sind, sofern sie nicht mit den Näherungswerten übereinstimmen, in Klammern gesetzt.*

Staupunktströmung			Kanalströmung	
	eben	rotationssymmetrisch		eben, rotationssymmetrisch
$\sqrt{\frac{c}{\nu}}\,\vartheta_0$	0,271 (0,292)	0,235 (0,247)	ϑ_k	0
L_0	0,0260 (0,0292)	0,0195 (0,0208)	L_k	0
H_0	2,25 (2,22)	2,32 (2,30)	H_k	2,60
α_0	0,345 (0,360)	0,320 (0,324)	α_k	0,220

[1] Man kann zeigen, daß dieser Wert auch aus (52) folgt.
[2] *H. Schlichting*, Grenzschicht-Theorie, Karlsruhe, 1951.

mäßigkeiten nach *Blasius*, d. h. $\vartheta \sim \sqrt{x}$. Der entsprechende H-Wert ist konstant und beträgt $H = 2{,}60$. Von der Stelle x_u ab ist die Reibungsschicht voll-turbulent. Hierfür gilt dann näherungsweise $\vartheta \sim \vartheta_u + c\,(x - x_u)$. Der entsprechende H-Wert hängt noch etwas von der im Umschlagspunkt herrschenden *Reynolds*schen Zahl $U_\infty \vartheta/\nu$ ab. Nach Messungen, z. B. von *F. Schultz-Grunow* [1], sowie aus den ähnlichen Lösungen bei Gleichdruck von *J. Rotta* [2] findet man etwa $1{,}2 < H < 1{,}4$, und zwar ist der H-Wert umso kleiner, je größer die *Reynolds*sche Zahl ist. Der H-Wert fällt also gegenüber dem laminaren Wert ab. Er muß sich also im Übergangsbereich stetig von dem laminaren auf den turbulenten Wert ändern. In Abb. 13 haben wir die Differenz ΔH über $U\vartheta/\nu$ aufgetragen. Der Einfachheit halber lassen wir x_u mit $x_{\ddot{u}}$ zusammen-

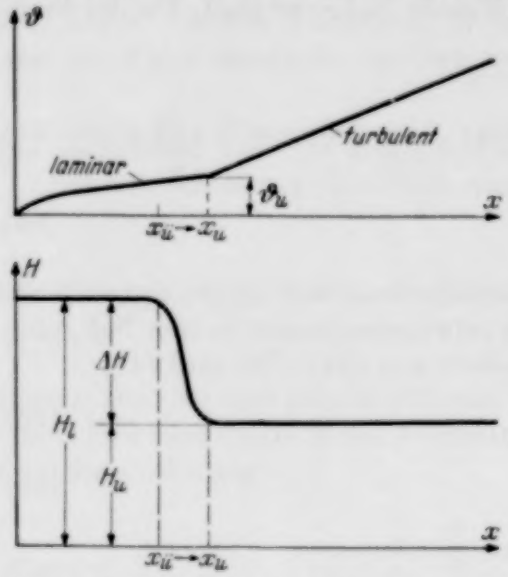

Abb. 12. Übersichtsskizze vom Umschlagspunkt der ebenen Platte.

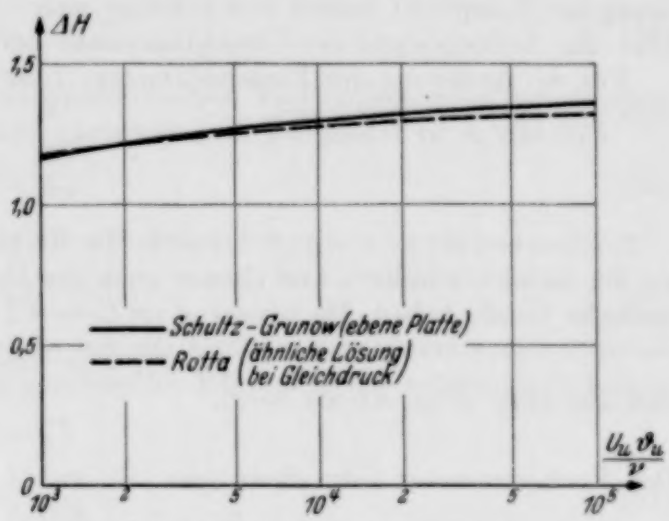

Abb. 13. Die Änderung des Formparameters H im Übergangsgebiet von laminarer zu turbulenter Strömung.

fallen, dann ist der Anfangswert für die Impulsverlustdicke der turbulenten Rechnung gleich derjenigen Impulsverlustdicke, die sich im Punkt x_u ergeben würde, wenn die Strömung bis zu diesem Punkt voll-laminar wäre. Wir wollen daher setzen

$$\vartheta_t(x_u) = \vartheta_u = \vartheta_l(x_u)\,. \tag{70}$$

Für den H-Wert schreiben wir

$$H_t(x_u) = H_u = H_l(x_u) - \Delta H\,. \tag{71}$$

Wir wollen nun annehmen, daß ΔH auch für die Fälle mit Druckgradient aus Abb. 13 entnommen werden kann. Diese Annahme scheint uns berechtigt, da der Umschlagspunkt in der Nähe des Punktes verschwindenden Druckgradienten liegt und hierfür in brauchbarer Näherung die Werte der ebenen Platte angenommen werden können. Haben wir so H_u bestimmt, so ermitteln wir nach Abb. 9 den Wert $L_u = L(x_u)$, der dann in (51) als L_1 eingeht. Es sei an dieser Stelle noch einmal darauf hingewiesen, daß der Anfangswert für L an Stellen, die weiter stromabwärts vom Umschlagspunkt liegen, nur untergeordnete Bedeutung besitzt, so daß uns eine etwas rohere Abschätzung berechtigt erscheint, wenn es darum geht, den Ablösungspunkt zu bestimmen.

d) Der Ablösungspunkt. Wichtig ist noch die Kenntnis der Lage des Ablösungspunktes. Er ergibt sich, wenn die Wandschubspannung den Wert Null annimmt. Während dieser Punkt im laminaren Fall entsprechend den vorgegebenen Geschwindigkeitsprofilen durch $\alpha_l = 0$ nach (19) festliegt, ist man im turbulenten Fall noch nicht in der Lage, eine ganz klare Angabe über den Ablösungspunkt zu machen. Nach den Wandschubspannungsansätzen von *Ludwieg-Tillmann* und *Rotta* (vgl. Abb. 3) verkleinert sich die Schubspannung mit wachsendem Wert H, ohne jedoch den Wert Null zu erreichen. Als Näherungsregel kann nach *v. Doenhoff-Tetervin* [3] etwa gelten, daß die Ablösung frühestens be-

Tabelle 4. *Werte des Formparameters im Ablösungspunkt.*

	laminar	turbulent
H	4,038	1,8 bis 2,4
L	−0,018	−0,13 bis −0,18

[1] *F. Schultz-Grunow*, Luftfahrtforschung, 17 (1940), S. 239. — [2] Siehe Fußnote 4 auf Seite 212. — [3] Siehe Fußnote 11 auf Seite 211. — [4] Diese Angabe entspricht etwa der *Gruschwitz*schen Annahme $\eta = 1 - (u_0/U)^2 = 0{,}8$.

ginnt, wenn $H \approx 1{,}8$ [4] ist, und bestimmt stattgefunden hat, wenn H den Wert 2,4 erreicht hat. Tabelle 4 gibt eine Zusammenstellung der auftretenden Werte.

e) Beispiele. Die Brauchbarkeit des oben beschriebenen Verfahrens wird an je einem Beispiel laminarer bzw. turbulenter Strömung gezeigt.

1. *Howarth*-Strömung (laminar). Als Beispiel für die laminare Strömung wählen wir die bekannte *Howarth*-Strömung [1]. In diesem Fall ist die Geschwindigkeitsverteilung

$$\frac{U}{U_\infty} = 1 - \frac{x}{l}. \tag{72}$$

Setzen wir (72) in (41) ein, worin wir die Radiusverteilung R streichen, dann können wir die Quadratur geschlossen ausführen. Es ergibt sich für die Impulsverlustdicke

$$\frac{\vartheta}{l} = \frac{c_f}{2\sqrt{6}} \frac{\sqrt{1-\left(1-\frac{x}{l}\right)^6}}{\left(1-\frac{x}{l}\right)^3} = \frac{0{,}2711}{\sqrt{\frac{U_\infty l}{\nu}}} \frac{\sqrt{1-\left(1-\frac{x}{l}\right)^6}}{\left(1-\frac{x}{l}\right)^3}. \tag{73}$$

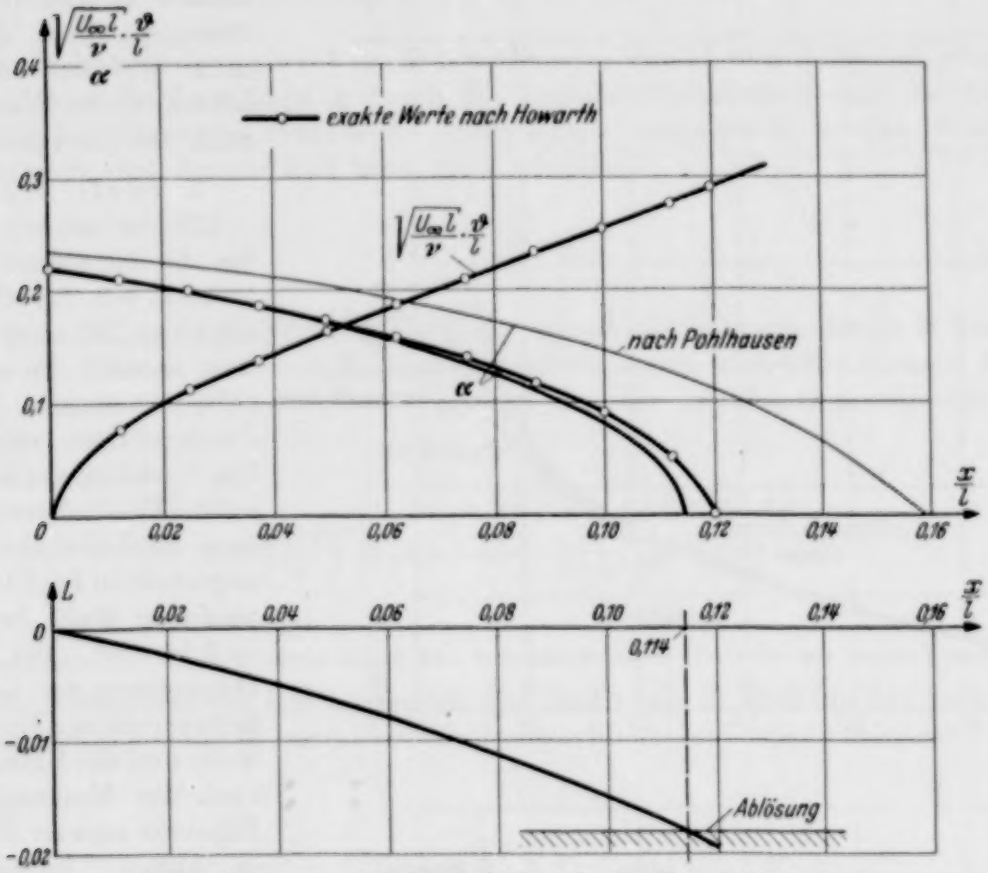

Abb. 14. Die laminaren Reibungsschichtgrößen der *Howarth*-Strömung.

In Abb. 14 zeigen wir den Vergleich dieser Näherung mit den exakten Werten von *Howarth*. Die Übereinstimmung ist im Rahmen der Zeichengenauigkeit vollkommen.

Zur Bestimmung des Formparameters berechnen wir zunächst die neue Veränderliche ξ nach (50 a)

$$\xi = Z^{\frac{a}{A}} \quad \text{mit} \quad Z = 1-\left(1-\frac{x}{l}\right)^6 = 1-\left(\frac{U}{U_\infty}\right)^6. \tag{74}$$

Auch der Formparameter selbst läßt sich nach (52) analytisch berechnen. Da wir uns entsprechend der vorgegebenen Geschwindigkeitsverteilung im Gebiet des Druckanstiegs befinden, wählen wir laut Tabelle 2 den Wert $a/A = 8$. Man findet nach kurzer Zwischenrechnung

$$L = \frac{1}{\xi}\int_0^\xi \frac{1}{U}\frac{dU}{d\xi'}\xi'\,d\xi' = -\frac{1}{6\,Z^8}\int_0^Z \frac{Z'^8}{1-Z'}\,dZ' = -\frac{1}{6}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{Z^m}{m+8}. \tag{75}$$

[1] *L. Howarth*, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 919, Bd. 164, (1938) S. 547.

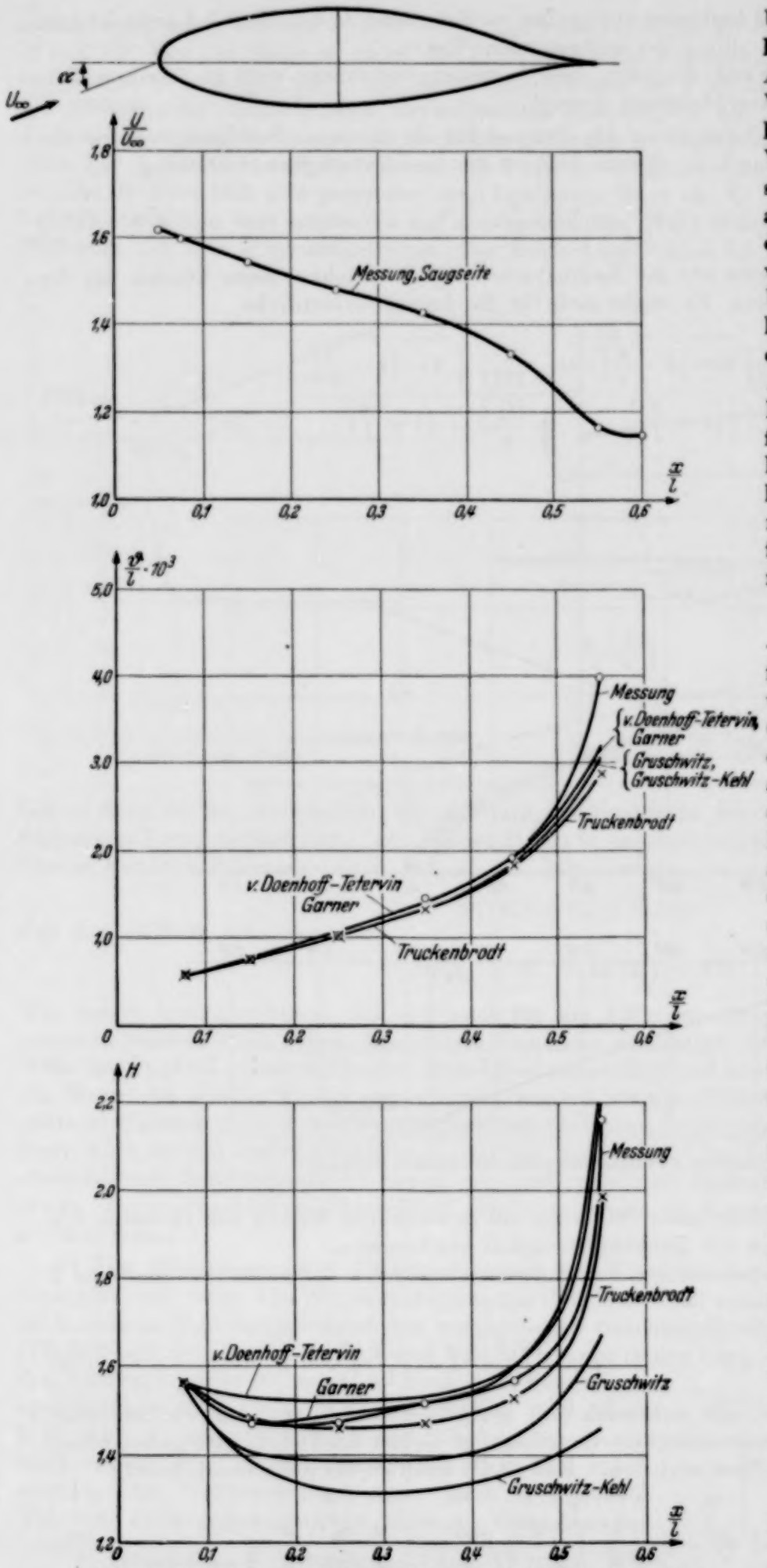

Abb. 15. Die turbulente Reibungsschicht am Profil NACA 65 (216)—222 $\alpha = 10{,}1°$, $\frac{U_\infty l}{\nu} = 2{,}64 \cdot 10^6$. Messung nach NACA Rep. No. 772.

Unter Beachtung von (74) haben wir $L(x)$ ebenfalls in Abb. 14 dargestellt. Aus diesen Werten haben wir unter Zuhilfenahme der Abb. 8 die Werte α für die Wandschubspannung bestimmt. Sie sind auch in Abb. 14 dargestellt und dort mit den exakten Werten von *Howarth* verglichen. Die Übereinstimmung ist recht befriedigend. Gezeigt ist auch die Kurve, die sich nach dem *Pohlhausen*-Verfahren ergibt[1]. Man erhält, wie schon *A. Walz* feststellt, eine wesentlich bessere Bestimmung des Ablösungspunktes, $\alpha = 0$, wenn man, wie bei unserem Verfahren, außer dem Impulssatz noch den Energiesatz benutzt.

2. Profil NACA 65(216)—222 (turbulent). Als Beispiel für die turbulente Rechnung wählen wir das Profil NACA 65(216)—222 (approx), für das sowohl Messungen[2] als auch theoretische Rechnungen durchgeführt worden sind. Die Verhältnisse beziehen sich auf die Profiloberseite des unter dem Anstellwinkel $\alpha = 10{,}1°$ angestellten Profiles. Die *Reynolds*sche Zahl beträgt $U_\infty l/\nu = 2{,}64 \cdot 10^6$. Die graphische Darstellung der Geschwindigkeitsverteilung, Impulsverlustdicke und des Formparameters nach der Messung, sowie das Ergebnis unserer Rechnung ist in Abb. 15 mitgeteilt. Wir haben unsere Rechnung in dem ersten gemessenen Punkt, d. h. $x/l = 0{,}075$ begonnen. Die Übereinstimmung zwischen unserer Näherung und der Messung ist als gut zu bezeichnen[3]. Zum Vergleich haben wir noch das Ergebnis nach

[1] Diese Kurve haben wir von *A. Walz* (Fußnote 5 auf Seite 211) entnommen.

[2] *A. E. v. Doenhoff* u. *N. Tetervin*, Fußnote 11 auf Seite 211.

[3] Die größeren Unterschiede zwischen Messung und Rechnung für die Impulsverlustdicke in der Umgebung des Ablösungspunktes

der v. *Doenhoff-Tetervin*schen Rechnung, sowie nach den Verfahren von *Garner*, *Gruschwitz* und *Gruschwitz-Kehl* miteingetragen. Die letzten beiden Verfahren weichen für den Formparameter H von den anderen Verfahren und der Messung stark ab.

5. Zusammenfassung. Zur Berechnung der charakteristischen Reibungsschichtgrößen (Impulsverlustdicke und Formparameter für das Geschwindigkeitsprofil) werden zwei Quadraturformeln angegeben, die sowohl für den laminaren als auch den turbulenten Strömungszustand gelten. In diesen Formeln ist gleichermaßen der ebene und rotationssymmetrische Fall enthalten.

Die Berechnung der Impulsverlustdicke erfolgt durch eine einfache Integration des Energiesatzes. Die Gleichung für den Formparameter wird durch Kopplung des Impulssatzes mit dem Energiesatz gewonnen. Die Kenntnis der Ableitungen der Geschwindigkeitsverteilung und des Körperradius nach der Lauflänge ist nicht erforderlich.

Anhang. Betrachtung über die Formel zur Berechnung der Impulsverlustdicke.

Wie bereits erwähnt, wurde bisher die Impulsverlustdicke aus dem Impulssatz (16) berechnet. Unter gewissen Vereinfachungen ist es möglich, zur Berechnung der Impulsverlustdicke aus dem Impulssatz eine unserer Gleichung (36) ähnliche Formel zu finden. Dabei gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Die Wandschubspannung wird nach den Gesetzen der ebenen längsangeströmten Platte bestimmt, in denen die Lauflänge x durch die Impulsverlustdicke ϑ und die Anströmungsgeschwindigkeit U_∞ durch die örtliche Geschwindigkeit ausgedrückt werden. Sowohl für den laminaren als auch turbulenten Fall kann man schreiben

$$\frac{\tau_0}{\varrho\, U^2} = \frac{\alpha}{\left(\frac{U\,\vartheta}{\nu}\right)^n}.$$

Setzt man außerdem im Impulssatz für das Reibungsschichtdickenverhältnis H einen konstanten Wert ein, dann kann man, wie *E. Truckenbrodt* in einem unveröffentlichten Bericht (vgl. *H. Schlichting*, Grenzschicht-Theorie S. 430) gezeigt hat, den Impulssatz geschlossen integrieren, und zwar ergibt sich

$$\Theta = \left(\frac{U\,\vartheta}{\nu}\right)^n \vartheta = \frac{C_1 + (1+n)\,\alpha \int_{x_1}^{x} U^a\, R^{1+n}\, dx'}{U^a\, R^{1+n}},$$

wobei $a = (1+n)(H+2) - n$ ist.

Die entsprechenden Zahlenwerte sind aus nachstehender Tabelle zu entnehmen.

2. Nach *K. Pohlhausen* für den laminaren Fall und nach *E. Buri* für den turbulenten Fall sind die Wandschubspannung und das Reibungsschichtverhältnis Funktionen der Größe $\Gamma = \frac{\Theta}{U}\frac{dU}{dx}$.

D. h. $$\frac{\tau_0}{\varrho\, U^2} = \frac{f_1(\Gamma)}{\left(\frac{U\,\vartheta}{\nu}\right)^n} \qquad \text{und} \qquad H = f_2(\Gamma).$$

Setzt man $\Lambda = \Theta R^{1+n}$ und $x^* = \int_0^x R^{1+n}\, dx$, dann kann man nach einiger Zwischenrechnung die folgende Gleichung finden:

$$\frac{d\Lambda}{dx^*} = \Phi(\Gamma) \quad \text{mit} \quad \Gamma = \frac{\Lambda}{U}\frac{dU}{dx^*}.$$

Hierin stellt $\Phi(\Gamma) = (1+n) f_1(\Gamma) - [2+n+(1+n) f_2(\Gamma)]\,\Gamma$ eine universelle Funktion für den laminaren bzw. turbulenten Zustand dar, die sich im ersten Fall analytisch berechnen läßt (z. B. für die *Pohlhausen*-Polynome) und sich im zweiten Fall aus Messungen bestimmen läßt. In beiden Fällen kann man näherungsweise einen linearen Zusammenhang von Φ und Γ finden (vgl. *A. Walz*, Lilienthal-Bericht 141 (1941) und *E. Buri*).

$$\Phi(\Gamma) = -\,b\,\Gamma + c.$$

$x/l \approx 0{,}55$ können, worauf *A. E. v. Doenhoff* und *N. Tetervin* hinweisen, auf systematische Meßungenauigkeiten zurückzuführen sein.

Setzt man diesen Ausdruck oben ein, dann läßt sich die Integration geschlossen ausführen und liefert nach einfacher Zwischenrechnung

$$\Theta = \left(\frac{U\,\vartheta}{\nu}\right)^n \vartheta = \frac{C_1 + c\int_{x_1}^{x} U^b\, R^{1+n}\, dx'}{U^b\, R^{1+n}}\,.$$

Die Zahlenwerte c und b sind ebenfalls in nachstehender Tabelle angegeben (vgl. *H. Schlichting*, Grenzschicht-Theorie S. 199 u. 424). Zum Vergleich sind auch die Konstanten nach (36) mitgeteilt worden.

		laminar	turbulent	
	n	1	$\frac{1}{4}$ (*Blasius*)	$\frac{1}{6}$ (*Falkner*)
Faktor vor dem Integral	A	0,441	—	0,0076
	$(1+n)\,\alpha$	0,441	0,0160	0,0076
	c	0,470	0,0160	—
Exponent der Geschwindigkeitsverteilung	$3+2n$	5,0	—	3,33
	a	8,2	4,0	3,67
	b	5,0	4,0	—

(Eingegangen am 20. Dezember 1951).

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *E. Truckenbrodt*, Braunschweig, Körnerstraße 12.

Ein Stoffgesetzansatz für elastische, anisotrope Medien.

Von E. Pieruschka.

1. Einführung. In einer früheren Arbeit[1] wurde mit Hilfe des Tensorkalküls ein Stoffgesetz für isotrope Körper aufgestellt. Nun soll die Untersuchung auf anisotrope verallgemeinert werden. Doch wird hier insofern eine Einschränkung gemacht, als nur der elastische Bereich behandelt werden soll. Dieser dürfte aber genügen, denn Überbeanspruchung des anisotropen Körpers führt mindestens zur Zerstörung der Kristalle, d. h. der Anisotropie.

Es sollen hier die gleichen Bezeichnungen wie in der ersten Arbeit gewählt werden. Der Abschnitt „Mathematische Hilfsmittel" muß aber noch ergänzt werden. Das doppelte Multiplikationszeichen $(\cdot\cdot)$ zwischen zwei Tensoren soll andeuten, daß die skalare Multiplikation zuerst auf die benachbarten und dann noch auf die verbleibenden Einheitsvektoren angewandt wird:

$$\mathfrak{A}\cdot\cdot\mathfrak{B} = a_{ab}\, b_{ba}\,.^{2} \tag{1.1}$$

Neben der antimetrischen Deutung des Rotors eines Vektors, der nach der ersten Arbeit mit Rot bezeichnet wird, braucht man hier auch die vektorielle Deutung. Dieser Rotor soll mit rot bezeichnet werden. Das Volumenintegral des Rotors eines Vektors läßt sich nach der bekannten Formel

$$\int dV \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{s} = \oint [d\mathfrak{f}\, \mathfrak{s}] \tag{1.2}$$

in ein Oberflächenintegral umwandeln. Die eckige Klammer deutet das vektorielle Produkt an. Weiter werden später noch die Beziehungen gebraucht:

$$\operatorname{div}(u\,\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}\cdot\operatorname{grad}(u) \quad + u\cdot\operatorname{div}\mathfrak{A}\,, \tag{1.3}$$

$$\operatorname{div}(\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{b}) = \mathfrak{A}\cdot\cdot\operatorname{grad}\mathfrak{b} \quad + \mathfrak{b}\cdot\operatorname{div}\mathfrak{A}\,, \tag{1.4}$$

$$\Delta\mathfrak{s} = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathfrak{s}) \quad + \operatorname{div}(\operatorname{Rot}\mathfrak{s})\,. \tag{1.5}$$

2. Das Stoffgesetz. Das Stoffgesetz von *Hooke* für elastische, isotrope Stoffe lautet

$$\mathfrak{P} = \frac{3}{2}(K\,\mathfrak{J})\cdot e + G\,\mathfrak{E}_0\,. \tag{2.1}$$

Der Ansatz für ein Stoffgesetz anisotroper Körper muß so erfolgen, daß das *Hooke*sche Gesetz ein Sonderfall des gesuchten Stoffgesetzes ist. Dies läßt sich so erreichen, daß man für den Kugeltensor $(K\,\mathfrak{J})$ einen allgemeinen symmetrischen Tensor setzt.

Damit dürften aber die Möglichkeiten (2.1) zu verallgemeinern erschöpft sein, denn im Summanden $G\cdot\mathfrak{E}_0$, der sich auch $(G\,\mathfrak{J})\cdot\mathfrak{E}_0$ schreiben läßt, kann nicht der Kugeltensor $G\,\mathfrak{J}$ durch einen symmetrischen Stofftensor $\mathfrak{G}$ ersetzt werden, da $\mathfrak{G}\cdot\mathfrak{E}_0$ nicht mehr symmetrisch wäre: die Symmetrie der Summanden der Tensoren müßte aber bei einer Verallgemeinerung von (2.1) wegen der Symmetrie von $\mathfrak{P}$ erhalten bleiben.

Der einfachste Ansatz für ein Stoffgesetz anisotroper, elastischer Medien, aus dem sich bei Isotropie automatisch das Stoffgesetz von *Hooke* ergibt, ist demnach

$$\mathfrak{P} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\,\mathfrak{K}\cdot e + G\,\mathfrak{E}_0\,. \tag{2.2}$$

$\mathfrak{K}$ ist der neu eingeführte nur vom Stoff abhängige Tensor. Der Faktor von $\mathfrak{K}$ ist so gewählt, daß bei isotropen Stoffen mit $\mathfrak{K} = k\,\mathfrak{J}$ die Gleichung (2.1) entsteht, wenn man K in (2.1) als Intensität[2] deutet. Es ist dann nämlich $K = k\cdot\sqrt{3}$ mit k als Mittelkomponente von $\mathfrak{K}$.

Die Aufteilung von (2.2) in Kugeltensor und Deviator ergibt

$$p = \frac{3\sqrt{3}}{2}\,k\cdot e\,, \tag{2.2a}$$

---

[1] Ing.-Arch. 19 (1951) S. 271.

[2] Die „Intensität" A des Tensors $\mathfrak{A}$, die durch $A^2 = a_{ab}\,a_{ba}$ gemäß (2.4) a. a. O. gegeben ist, läßt sich hiernach schreiben $\mathfrak{A}\cdot\cdot\mathfrak{A} = A^2$.

$$\mathfrak{P}_0 = \frac{3\sqrt{3}}{2} e\, \mathfrak{K}_0 + G\, \mathfrak{E}_0 . \tag{2.2b}$$

Formel (2.2) kann auch nach $\mathfrak{E}$ aufgelöst werden. Man erhält

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{k}\left(\frac{2\sqrt{3}}{9}\mathfrak{Z} - \frac{1}{G}\mathfrak{K}_0\right) p + \frac{1}{G}\mathfrak{P}_0 . \tag{2.3}$$

Die anisotropen Stoffe, die dem hier entwickelten Stoffgesetz gehorchen, haben zwei wesentliche Eigenschaften.

Ist der Spannungstensor ein reiner Kugeltensor — Deviator $\mathfrak{P}_0$ ist Null — so ist der Verzerrungstensor ein allgemeiner symmetrischer Tensor. Er hängt linear vom Druck p ab. Seine Hauptachsen ergeben sich aus der Struktur des Stoffes. Hier wird also ein vor der Beanspruchung kugelförmiges Stoffgebiet, das bei Isotropie auch bei Belastung seine Kugelgestalt behält, zum Ellipsoid, dessen Hauptachsen vom Stoff allein abhängen. Sicher wird wohl diese erste Eigenschaft auf alle anisotropen Stoffe im elastischen Bereich zutreffen.

Ist die Mittelkomponente des Spannungs- und damit auch des Verzerrungstensors Null, dann sind nach (2.2a) und (2.2b) der Spannungs- und der Verzerrungstensor — es sind hier Deviatoren — koaxial und ähnlich und hängen linear voneinander ab. In diesem Spezialfalle unterscheiden sich nach dem hier gemachten Ansatz isotrope und anisotrope Stoffe nicht. Es muß also ein anisotroper Körper, der dem Stoffgesetz (2.2) gehorcht, bei der Beanspruchung durch ein reines Drehmoment, immer dieselbe Verformung haben, unabhängig von der Lage der Drehmomentachsen im Tensorfeld $\mathfrak{K}$. Es muß durch Versuche festgestellt werden, welche anisotrope Stoffe die zweite Eigenschaft zeigen.

Der Spannungs- und der Verzerrungstensor bestehen aus je sechs Komponenten. Der allgemeinste Fall eines Stoffgesetzes würde demnach 36 Stoffkonstanten enthalten. Bei Isotropie des Stoffes und Elastizität reduzierten sich diese auf zwei (K und G bzw. $\mathfrak{E}$ und m). Das anisotrope Stoffgesetz (2.2) hat 7 unabhängige Stoffkonstanten, nämlich die sechs Komponenten des Stofftensors $\mathfrak{K}$ und den Schubmodell G. Man kann dies auch so ausdrücken, daß neben den drei Hauptrichtungen des Tensors $\mathfrak{K}$ vier Stoffkonstanten vorhanden sind. Also ist auch hier eine sehr starke Spezialisierung des allgemeinst möglichen Stoffgesetzes vorhanden.

Das Wesentliche des Stoffgesetzes (2.2) kommt am besten zum Ausdruck, wenn man den Spezialfall betrachtet, bei dem die Hauptachsen des Spannungstensor mit dem des Stofftensors zusammenfallen. Legt man auch die Koordinatenachsen in die Hauptachsen von $\mathfrak{K}$ und damit auch von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{E}$, so ergibt sich

$$e_{\alpha\alpha} = \frac{1}{G}\left[p_{\alpha\alpha} + \frac{p}{k}\left(\frac{2}{3\sqrt{3}} G - k_{\alpha\alpha}\right)\right] . \tag{2.4}$$

Bezeichnet man die Koordinatenachsen mit den üblichen Buchstaben x, y und z, die Hauptdehnungen mit ε_x, ε_y und ε_z, die Hauptspannungen mit σ_x, σ_y und σ_z, und die Komponenten des Stofftensors $\mathfrak{K}$ mit k_x, k_y und k_z, und führt man ähnliche Größen wie den Elastizitätsmodul und die *Poisson*sche Zahl bei isotropen Stoffen ein, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E_x}\left(\sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m_x}\right), \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E_y}\left(\sigma_y - \frac{\sigma_z + \sigma_x}{m_y}\right), \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E_z}\left(\sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m_z}\right). \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

Hier haben die Konstanten die Werte

$$\left.\begin{aligned} E_x &= \frac{G}{1 + \frac{1}{3k}\left(\frac{2}{3\sqrt{3}} G - k_x\right)}, \\ E_y &= \frac{G}{1 + \frac{1}{3k}\left(\frac{2}{3\sqrt{3}} G - k_y\right)}, \\ E_z &= \frac{G}{1 + \frac{1}{3k}\left(\frac{2}{3\sqrt{3}} G - k_z\right)}, \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

$$m_x = \frac{G}{E_x - G}, \qquad m_y = \frac{G}{E_y - G}, \qquad m_z = \frac{G}{E_z - G}. \tag{2.7}$$

Für die hier angenommene Belastung erhält man die drei Elastizitätsmoduln E_x, E_y und E_z und die drei *Poisson*schen Konstanten m_x, m_y und m_z, die nicht unabhängig voneinander sind, sondern sich durch die Elastizitätsmoduln und dem Schubmodul G als vierte Konstante ausdrücken lassen. Das Gleichungssystem (2.5) zeigt eine ähnliche Form wie das bekannte entsprechende Gleichungssystem bei isotropen Stoffen.

3. Die Wellengleichung anisotroper Stoffe. Als Beispiel soll hier wieder wie in der ersten bereits erwähnten Arbeit die Wellengleichung anisotroper Stoffe aufgestellt und gelöst werden. Es werden hier die Voraussetzungen wie bei der ersten Arbeit gemacht und aus dieser Arbeit die Beziehungen übernommen [1]:

$$\operatorname{div} \mathfrak{P} = \varrho \frac{\partial^2 \mathfrak{s}}{\partial t^2}, \tag{3.1}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{E}_0 = \Delta \mathfrak{s} + \frac{1}{3} \operatorname{grad} (\operatorname{div} \mathfrak{s}). \tag{3.2}$$

Formel (3.2) läßt sich durch Einsetzen von (1.5) auch schreiben

$$\operatorname{div} \mathfrak{E}_0 = \frac{4}{3} \operatorname{grad} (\operatorname{div} \mathfrak{s}) + \operatorname{div} (\operatorname{Rot} \mathfrak{s}). \tag{3.3}$$

Entwickelt man $\operatorname{div} (e\, \mathfrak{N})$ nach (1.3) und beachtet, daß $\operatorname{div} \mathfrak{N} = 0$ ist und $e = \frac{2}{3} \operatorname{div} \mathfrak{s}$, so erhält man

$$\operatorname{div} (e\, \mathfrak{N}) = \frac{2}{3} K \cdot \operatorname{grad} (\operatorname{div}. \mathfrak{s}). \tag{3.4}$$

Nun bilde man die Divergenz auf (2.2) und setze in der neu entstandenen Gleichung (3.1), (3.4) und (3.3) ein. So erhält man die Wellengleichung der anisotropen Stoffe, die dem Gesetz (2.2) gehorchen:

$$\varrho \frac{\partial^2 \mathfrak{s}}{\partial t^2} = \sqrt{3}\, \mathfrak{N} \operatorname{grad} (\operatorname{div} \mathfrak{s}) + \frac{4}{3} G \operatorname{grad} (\operatorname{div} \mathfrak{s}) + G \operatorname{div} (\operatorname{Rot} \mathfrak{s}). \tag{3.5}$$

Formel (3.5) läßt sich noch weiter behandeln. Dazu zerlegt man den Vektor $\mathfrak{s}$ so in die zwei Vektoren $\bar{\mathfrak{s}}$ und $\bar{\bar{\mathfrak{s}}}$, daß der Rotor vom ersten und die Divergenz vom zweiten Vektor Null werden. Es wird so

$$\mathfrak{s} = \bar{\mathfrak{s}} + \bar{\bar{\mathfrak{s}}} \tag{3.6}$$

mit

$$\operatorname{Rot} \bar{\mathfrak{s}} = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{div} \bar{\bar{\mathfrak{s}}} = 0, \tag{3.7}$$

Da $\bar{\mathfrak{s}}$ und $\bar{\bar{\mathfrak{s}}}$ nicht linear voneinander abhängen, wie sich noch später zeigen wird, zerfällt die Wellengleichung (3.5) in die zwei Gleichungen

$$\frac{\partial^2 \bar{\mathfrak{s}}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varrho} \left(\sqrt{3}\, \mathfrak{N} + \frac{4}{3} G\, \mathfrak{J} \right) \operatorname{grad} (\operatorname{div} \bar{\mathfrak{s}}), \tag{3.8a}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\bar{\mathfrak{s}}}}{\partial t^2} = \frac{G}{\varrho} \operatorname{div} (\operatorname{Rot} \bar{\bar{\mathfrak{s}}}). \tag{3.8b}$$

Formel (3.8a) läßt sich noch umformen. Dazu bilde man die Divergenz letzterer Gleichung und beachtet, daß

$$\operatorname{div} \bar{\mathfrak{s}} = \operatorname{div} \mathfrak{s} = \frac{1}{\sqrt{3}\, k} p \tag{3.9}$$

ist. Unter Verwendung dieser Beziehung und von (1.4), erhält man schließlich, da die Divergenz des konstanten Tensors $\left(\sqrt{3}\, \mathfrak{N} + \frac{4}{3} G\, \mathfrak{J} \right)$ Null ist,

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{\varrho} \left(\sqrt{3}\, \mathfrak{N} + \frac{4}{3} G\, \mathfrak{J} \right) \cdot \cdot \operatorname{grad} (\operatorname{grad} p). \tag{3.8c}$$

Damit ist die Wellengleichung (3.5) in die Gleichung für die Druck- oder Kompressionswelle (3.8a) bzw. (3.8c) und die Scherungswelle (3.8b) zerlegt.

[1] Vgl. die dortigen Gleichungen (9.4) u. (9.3).

4. Die Kompressionswelle. Legt man die Koordinatenachsen in die Hauptachsen von $\mathfrak{K}$, so daß $k_{\alpha\beta} = 0$ für $\alpha = \beta$ wird, so kann man (3.8c) schreiben

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{G}{\varrho}\left(\frac{4}{3} + \sqrt{3}\,\frac{k_{\alpha\alpha}}{G}\right)\frac{\partial^2 p}{\partial x_\alpha^2}\,. \tag{4.1}$$

Setzt man

$$x_\alpha = y_\alpha \sqrt{\left(\frac{4}{3} + \sqrt{3}\,\frac{k_{\alpha\alpha}}{G}\right)}\,, \tag{4.2}$$

so erhält man aus (4.1)

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{G}{\varrho}\,\frac{\partial^2 p}{\partial y_\alpha^2}\,. \tag{4.3}$$

Liegt das Störungszentrum mit der Frequenz α im Koordinatenursprung und können sich die Wellen frei nach allen Richtungen ausbreiten, so lautet die Lösung der Wellengleichung (4.3) — wären die y_α reine Raumkoordinaten, so könnte man von Kugelwellen sprechen —

$$p = \frac{p_0}{R}\, e^{i\,\alpha(t - R/v_0)} \tag{4.4}$$

mit

$$R^2 = y_\alpha^2 = \frac{x_\alpha^2}{\frac{4}{3} + \sqrt{3}\,k_{\alpha\alpha}/G} \tag{4.5}$$

und

$$v_0 = \sqrt{\frac{G}{\varrho}}\,. \tag{4.6}$$

Um die Form der Wellenfronten zu erkennen, setze man in (4.4) und (4.5) $R =$ Konstant. Man erkennt dann, daß die Wellenfronten auf den Ellipsoidflächen liegen, deren Gleichungen (4.5) angibt. Man kann also hier von Ellipsoidwellen sprechen — analog Kugelwellen. Die Welle breitet sich strahlenförmig um den Koordinatenursprung aus. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in den Hauptachsen von $\mathfrak{K}$ sind

$$v_\alpha = \sqrt{\frac{G}{\varrho}}\sqrt{\left(\frac{4}{3} + \sqrt{3}\,\frac{k_{\alpha\alpha}}{G}\right)}\,. \tag{4.7}$$

Die Geschwindigkeit in einer anderen Richtung gibt die Länge des vom Ursprung nach der fraglichen Richtung gezogenen Vektors $\mathfrak{r}$. Der Endpunkt des Vektors $\mathfrak{r}$ liegt auf dem Ellipsoid

$$\frac{x_\alpha^2}{\frac{G}{\varrho}\left(\frac{4}{3} + \sqrt{3}\,k_{\alpha\alpha}/G\right)} = 1\,. \tag{4.8}$$

Die Richtung von $\bar{\mathfrak{s}}$ ergibt sich aus der Formel (1.2). Statt $\mathfrak{s}$ setze man hier $\bar{\mathfrak{s}}$. Da der Rotor von $\bar{\mathfrak{s}}$ Null ist, erhält man

$$\oint [d\mathfrak{f}\,\bar{\mathfrak{s}}] = 0\,. \tag{4.9}$$

Betrachtet man eine Kugelfläche im y_α-System, so hat $d\mathfrak{f}$ die Richtung von $\mathfrak{r}$. Aus Symmetriegründen muß für jeden Punkt der Kugeloberfläche das vektorielle Produkt aus $d\mathfrak{f}$ bzw. $\mathfrak{r}$ und $\bar{\mathfrak{s}}$ den gleichen absoluten Wert haben.

Deshalb kann (4.9) nur erfüllt sein, wenn $\bar{\mathfrak{s}}$ in Richtung von $\mathfrak{r}$ liegt, d. h. senkrecht zu der Tangentialebene der Kugel steht. Dies bedeutet, daß $\bar{\mathfrak{s}}$ im x_α-System senkrecht zu der Tangentialebene der Ellipsoide steht, auf denen die Wellenfronten liegen.

5. Die Scherungswelle. Da die Divergenz von $\bar{\bar{\mathfrak{s}}}$ Null ist, erhält man aus (1.5)

$$\operatorname{div}(\operatorname{Rot}\bar{\bar{\mathfrak{s}}}) = \Delta\bar{\bar{\mathfrak{s}}}\,. \tag{5.1}$$

Die Scherungswellengleichung nimmt damit die Form an

$$\frac{\partial^2 \bar{\bar{\mathfrak{s}}}}{\partial t^2} = \frac{G}{\varrho}\,\Delta\bar{\bar{\mathfrak{s}}}\,. \tag{5.2}$$

Eine Lösung von (5.2) ist die Kugelwelle

$$\bar{\bar{\mathfrak{S}}} = \frac{\bar{\bar{s}}_{0a}\, \mathfrak{C}_a}{r}\, e^{i\,x(t+t_a-r/v)} \tag{5.3}$$

mit

$$r^2 = x_a^2 \qquad \text{und} \qquad v = \sqrt{\frac{G}{\varrho}}\,. \tag{5.4}$$

Die Richtung von $\bar{\bar{\mathfrak{S}}}$ ergibt sich aus dem *Gauß*schen Satz, erweitert auf einen Tensor zweiter Stufe (siehe die erste Arbeit, auf die hier Bezug genommen wird):

$$\int_v \operatorname{div} \bar{\bar{\mathfrak{S}}} \cdot dV = \oint \bar{\bar{\mathfrak{S}}}\, \frac{\mathfrak{r}}{r}\, df \tag{5.5}$$

(Als Volumen nimmt man hier zweckmäßig eine Kugel). Da nun div $\bar{\bar{\mathfrak{S}}}$ Null ist und der Wert von $\bar{\bar{\mathfrak{S}}} \cdot \mathfrak{r}$ auf der Kugeloberfläche aus Symmetriegründen immer gleich sein muß, folgt

$\bar{\bar{\mathfrak{S}}}$ steht senkrecht auf r.

(Eingegangen am 9. Januar 1952.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *E. Pieruschka*, Kassel-Wilhelmshöhe, Bergstr. 15.

Zur Kombination thermischer und elektromagnetischer Felder im Falle der ebenen Platte.

Von M. Krüger.

1. Einleitung. In der Wärmetechnik finden in steigendem Maße Verfahren Anwendung, welche die Erwärmung von Leitern und Nichtleitern durch hochfrequente Wechselströme benutzen. Der Hauptvorteil dieser Verfahren, abgesehen von einer Reihe weiterer Vorteile rein technischer Art, liegt in der Wärmeproduktion im Materialinnern. In allgemeiner physikalischer Formulierung lautet dabei die Aufgabenstellung: Es sind thermische und elektromagnetische Felder so zu kombinieren, daß zu einer vorgegebenen Zeit im Material ein vorgegebener Temperaturverlauf erreicht wird, meist noch unter der einschränkenden Bedingung, daß nirgends vor der Endzeit die Endtemperatur überschritten wird. Unter thermischen Feldern sollen dabei solche verstanden werden, wie sie sich bei Vorhandensein der sogenannten äußeren und inneren Wärmeleitung ausbilden. Zu dem üblichen inhomogenen Wärmeleitungsproblem mit Anfangs- und Randbedingungen tritt also hier noch eine „Endbedingung" mit gegebenenfalls weiteren Einschränkungen. Im Interesse eines möglichst einfachen Einblicks in den Problemkreis mögen hier die elektromagnetischen Felder zunächst auf quasistationäre Wechselfelder in dielektrischen Stoffen mit nicht zu großem Verlustfaktor eingeschränkt werden uud das Material die Form einer ebenen, unendlich ausgedehnten Platte endlicher Dicke d haben (Abb. 1).

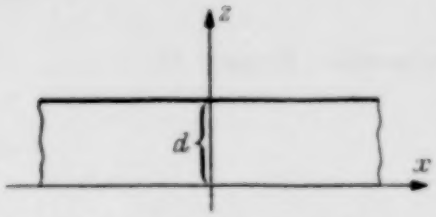

Abb. 1. Ebene Platte der Dicke d.

2. Allgemeine Lösung des Problems bei beliebiger Wärmeproduktion. Es handelt sich darum, unter den eben gemachten Einschränkungen eine allgemeine Lösung des Wärmeleitungsproblems möglichst in geschlossener Form zu finden, sodaß daraus eine Bedingungsgleichung für den vorgeschriebenen Temperaturverlauf zu einer vorgeschriebenen Zeit gewonnen werden kann. Es ist hier noch nicht notwendig, die Funktion $f(z)$, welche, mit der Dichte und der spezifischen Wärme multipliziert, die Wärmeproduktion je ccm und sec im Innern der Platte darstellt, zu spezialisieren. Bezeichnet man mit t die Zeit und mit $\vartheta(z, t)$ die Temperatur in ° C, so lautet also die zugrunde zu legende Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} + f(z)\,, \tag{1}$$

worin a^2, unabhängig von Ort, Druck und Temperatur angenommen, die Temperaturleitzahl bedeutet. Zur Zeit $t = 0$ herrsche die Temperaturverteilung

$$\vartheta(z, 0) = \varphi(z)\,, \tag{2}$$

und an den Rändern werde entsprechend dem *Newton*schen Abkühlungsgesetz gefordert:

$$[\vartheta_0(t) - \vartheta(0, t)]\,\alpha_0 = -\varkappa \frac{\partial \vartheta}{\partial z}(0, t), \tag{3}$$

$$[\vartheta_d(t) - \vartheta(d, t)]\,\alpha_d = +\varkappa \frac{\partial \vartheta}{\partial z}(d, t)\,, \tag{4}$$

worin $\vartheta_0(t)$, $\vartheta_d(t)$ zeitliche Temperaturverteilungen an den äußeren Rändern der Platte bedeuten und $\varkappa$ sowie α_0, α_d die konstant angenommenen Koeffizienten der inneren bzw. äußeren Wärmeleitung darstellen. Mit

$$\varkappa_0 = \frac{\varkappa}{\alpha_0}\,, \qquad \varkappa_d = \frac{\varkappa}{\alpha_d} \tag{5}$$

lauten die Randbedingungen endgültig

$$\vartheta_0(t) - \vartheta(0, t) = -\varkappa_0 \frac{\partial \vartheta}{\partial z}(0, t)\,, \tag{6}$$

$$\vartheta_d(t) - \vartheta(d, t) = +\varkappa_d \frac{\partial \vartheta}{\partial z}(d, t)\,. \tag{7}$$

$\varkappa_0 = 0$ bedeutet einen bei $z = 0$ vorgeschriebenen oder gesuchten (siehe später) Temperaturverlauf, $\varkappa_0 = \infty$ liefert die adiabatische Randbedingung. Für $\varkappa_d$ gilt Entsprechendes. Sind dann $f(z)$ und $\varphi(z)$ für $0 \leq z \leq d$ stetige, $\vartheta_0(t)$, $\vartheta_d(t)$ stückweise glatte Funktionen für $t \geq 0$, wobei die letzten beiden überdies noch der Bedingung genügen sollen, daß sich ein α_0 finden läßt derart, daß für alle $\alpha > \alpha_0$ die Integrale

$$\int_0^\infty \vartheta_0(t)\, e^{-\alpha t}\, dt\,, \qquad \int_0^\infty \vartheta_d(t)\, e^{-\alpha t}\, dt \tag{8}$$

absolut konvergieren, so findet man mit Hilfe der *Laplace*-Transformation die eindeutig bestimmte Lösung[1], die weiter unten verifiziert werden soll:

$$\left.\begin{aligned} &\vartheta(z,t) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\varkappa + L_{-\varkappa}} \frac{e^{a^2\varkappa^2 t}\, d\varkappa\, E_\varkappa(z)}{e^{-2\varkappa d}\,\varepsilon(\varkappa) - 1} \int_0^d \varphi(\xi)\, e^{-\varkappa\xi}\, d\xi + \frac{1}{2\pi i\, a^2} \int_{L_\varkappa + L_{-\varkappa}} \frac{e^{a^2\varkappa^2 t}\, d\varkappa\, E_\varkappa(z)}{\varkappa^2\left(e^{-2\varkappa d}\,\varepsilon(\varkappa) - 1\right)} \int_0^d f(\xi)\, e^{-\varkappa\xi}\, d\xi \\ &\quad - \frac{a^2}{\pi i} \int_{L_\varkappa + L_{-\varkappa}} \frac{e^{a^2\varkappa^2 t} \cdot \varkappa \cdot d\varkappa}{e^{-2\varkappa d}\,\varepsilon(\varkappa) - 1} \left(\frac{e^{-\varkappa z}}{1 + \varkappa_0 \varkappa} \int_0^\infty \vartheta_0(\tau)\, e^{-\varkappa^2 a^2 \tau}\, d\tau + \frac{e^{-\varkappa(d-z)}}{1 + \varkappa_d \varkappa} \int_0^\infty \vartheta_d(\tau)\, e^{-\varkappa^2 a^2 \tau}\, d\tau \right) \\ &\qquad\qquad - \frac{1}{a^2} \int_0^z d\xi_1 \int_0^{\xi_1} f(\xi_2)\, d\xi_2\,. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Hier ist

$$E_\varkappa(z) = e^{-\varkappa z}\, \frac{1 - \varkappa_0 \varkappa}{1 + \varkappa_0 \varkappa} - e^{\varkappa z} \tag{10}$$

gesetzt, und $\int_{L_\varkappa}$ ist das Integral über einen Integrationsweg der komplexen $\varkappa$-Ebene, welcher durch die Abbildung

$$\gamma = a^2 \varkappa^2\,, \quad \gamma = \alpha + i\beta\,, \quad \alpha > \alpha_0 > 0 \tag{11}$$

aus der Parallelen im Abstande α zur imaginären Achse der γ-Ebene hervorgeht. Diese Parallele ist in Richtung von negativen zu positiven Imaginärteilen durchlaufen zu denken. Integral $\int_{L_{-\varkappa}}$ bedeutet das Integral über einen Weg der $\varkappa$-Ebene, welcher aus $L_\varkappa$ durch Spiegelung am Nullpunkt der $\varkappa$-Ebene hervorgeht, also die entgegengesetzte Durchlaufrichtung wie $L_\varkappa$ hat. Ferner ist

$$\varepsilon(\varkappa) = \frac{(1 - \varkappa_0 \varkappa)\,(1 - \varkappa_d \varkappa)}{(1 + \varkappa_0 \varkappa)\,(1 + \varkappa_d \varkappa)}\,. \tag{12}$$

Um zu sehen, ob die Lösung (9) der Wärmeleitungsgleichung (1) genügt, hat man nur zu beachten, daß t und z in den Exponenten von e-Potenzen in den ersten drei Summanden von (9) derart auftreten, daß diese Summanden nach den (1) entsprechenden Differentiationen, in (1) eingesetzt, verschwinden, während der zweimal nach z differenzierte vierte Summand von (9) sich gegen $f(z)$ in (1) weghebt.

Zum Nachweis der Erfüllung der Anfangsbedingung (2) setze man im ersten Summanden von (9) $t = 0$ und betrachte

$$\int_{L_{-\varkappa}} (\ )\, d\varkappa = \int_{L_\varkappa} \frac{e^{-2\varkappa d}\,\varepsilon(\varkappa)\, d\varkappa}{e^{-2\varkappa d}\,\varepsilon(\varkappa) - 1} \left(e^{\varkappa z} \cdot \frac{1 + \varkappa_0 \varkappa}{1 - \varkappa_0 \varkappa} - e^{-\varkappa z} \right) \int_0^d \varphi(\xi)\, e^{\varkappa\xi}\, d\xi\,. \tag{13}$$

Setzt man hier $\varkappa = \varkappa_r + i\,\varkappa_i$, $\varkappa_r$, $\varkappa_i$ reell, so entsteht daraus:

$$e^{-\varkappa_r^0 d} \int_{L_{+\varkappa}} \frac{e^{-(\varkappa_r - \varkappa_r^0)d} \cdot e^{-2\varkappa_i d i}\, \varepsilon(\varkappa)\, d\varkappa}{e^{-2\varkappa d}\,\varepsilon(\varkappa) - 1} \left[\int_0^d \varphi(\xi)\, e^{\varkappa\xi}\, d\xi \left(e^{\varkappa_r(z-d) + i\varkappa_i z} \frac{1 + \varkappa_0 \varkappa}{1 - \varkappa_0 \varkappa} - e^{-\varkappa_r(z+d) - i\varkappa_i z} \right) \right],$$

[1] Die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung sowie ihre Herleitung mit Hilfe der *Laplace*-Transformation ergibt sich nach *Hilbert-Courant*, Methoden der math. Phys., Bd. II, S. 205ff., Berlin 1937, wenn man den Randbedingungen (6), (7), entsprechende etwas allgemeinere zulässige Voraussetzungen macht.

wobei $\varkappa_r^0$ der kleinste Wert von $\varkappa_r$ auf $L_{+\varkappa}$ ist, welcher nach (11) sicher größer als 0 ist. Wie man leicht sieht, ist das Integral aber jedenfalls für alle z aus $0<z<d$ absolut beschränkt, und da $\varkappa_r^0$ wegen (11) beliebig groß sein kann, verschwindet (13). Dieselbe Schlußweise trifft auch auf $\int\limits_{L_\varkappa}(\;)\,d\varkappa$ für den Summanden mit $e^{-\varkappa z}$ zu. Fügt man zu dem verbleibenden

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_\varkappa}\frac{e^{+\varkappa z}\,d\varkappa}{e^{-2\varkappa d}\,\varepsilon(\varkappa)-1}\int\limits_0^d\varphi(\xi)\,e^{-\varkappa\xi}\,d\xi$$

das verschwindende Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_\varkappa}\frac{e^{-2\varkappa d}\,\varepsilon(\varkappa)\,e^{\varkappa z}}{e^{-2\varkappa d}\,\varepsilon(\varkappa)-1}\int\limits_0^d\varphi(\xi)\,e^{-\varkappa\xi}\,d\xi$$

hinzu, so erhält man für den ersten Summanden in (9)

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_\varkappa}e^{\varkappa z}\,d\varkappa\int\limits_0^d e^{-\varkappa\xi}\varphi(\xi)\,d\xi\,,$$

und das ist nach Verlagerung des Weges $L_\varkappa$ in die imaginäre Achse die *Fourier*sche Integraldarstellung für $\varphi(z)$ im Intervall 0 bis d. Es bleibt also noch zu zeigen, daß für $t=0$ die drei letzten Summanden in (9) verschwinden. Zunächst sieht man sofort, daß für $0<z<d$ der dritte Summand in (9) für $t=0$ aus ganz ähnlichen Gründen wie eben verschwindet, wenn man die Voraussetzung (8) berücksichtigt. Zweimalige partielle Integration von $\int\limits_0^d e^{-\varkappa\xi}f(\xi)\,d\xi$ im zweiten Summanden von (9) liefert

$$\int\limits_0^d e^{-\varkappa\xi}f(\xi)\,d\xi=e^{-\varkappa d}\int\limits_0^d f(\xi_2)\,d\xi_2+\varkappa\,e^{-\varkappa d}\int\limits_0^d d\xi_1\int\limits_0^{\xi_1}f(\xi_2)\,d\xi_2+\varkappa^2\int\limits_0^d e^{-\varkappa\xi}\int\limits_0^{\xi}d\xi_1\int\limits_0^{\xi_1}f(\xi_2)\,d\xi_2\,. \tag{14}$$

Setzt man dies in den zweiten Summanden von (9) für $t=0$ ein, so liefern für $0<z<d$ die ersten beiden Summanden der rechten Seite von (14) wieder verschwindende Bestandteile, während der dritte Summand nach derselben Schlußweise wie oben bei dem φ-Integral die *Fourier*sche Integraldarstellung von $\frac{1}{a^2}\int\limits_0^z d\xi_1\int\limits_0^{\xi_1}f(\xi_2)\,d\xi_2$ ergibt, die sich gegen den vierten Summanden in (9) weghebt. Somit ist bewiesen, daß (9) die Anfangsbedingung (2) erfüllt.

Um die Gültigkeit der Randbedingungen (6), (7) nachzuweisen, bedenke man, daß gilt

$$\left[E_\varkappa(z)-\varkappa_0\frac{dE_\varkappa}{dz}\right]_{z=0}=0\,, \tag{15}$$

$$\left[E_\varkappa(z)+\varkappa_d\frac{dE_\varkappa}{dz}\right]_{z=d}=e^{\varkappa d}\,(1+\varkappa_d\varkappa)\left(e^{-2\varkappa d}\,\varepsilon(\varkappa)-1\right). \tag{16}$$

Bei $z=0$ ergibt sich mithin aus (9)

$$\vartheta(0,t)-\varkappa_0\frac{\partial\vartheta}{\partial z}(0,t)=-\frac{a^2}{\pi i}\int\limits_{L_\varkappa}\frac{e^{a^2\varkappa^2 t}\,\varkappa\,d\varkappa}{e^{-2\varkappa d}\varepsilon(\varkappa)-1}\int\limits_0^\infty\vartheta_0(\tau)\,e^{-\varkappa^2a^2\tau}\,d\tau+\frac{a^2}{\pi i}\int\limits_{L_\varkappa}\frac{e^{a^2\varkappa^2t}\,\varkappa\,d\varkappa\,e^{-2\varkappa d}\,\varepsilon(\varkappa)}{e^{-2\varkappa d}\,\varepsilon(\varkappa)-1}$$

$$\times\int\limits_0^\infty\vartheta_0(\tau)\,e^{-\varkappa^2a^2\tau}\,d\tau-\frac{a^2}{\pi i}\int\limits_{L_\varkappa}\frac{e^{a^2\varkappa^2t}\,\varkappa\,d\varkappa\,e^{-\varkappa d}\,(1-\varkappa\varkappa_0)}{(e^{-2\varkappa d}\,\varepsilon(\varkappa)-1)\,(1+\varkappa_d\varkappa)}\int\limits_0^\infty\vartheta_d(\tau)\,e^{-\varkappa^2a^2\tau}\,d\tau$$

$$+\frac{a^2}{\pi i}\int\limits_{L_\varkappa}\frac{e^{a^2\varkappa^2t}\,\varkappa\,d\varkappa\,e^{-2\varkappa d}\,\varepsilon(\varkappa)\,e^{\varkappa d}\,(1+\varkappa_0\varkappa)}{(e^{-2\varkappa d}\,\varepsilon(\varkappa)-1)\,(1-\varkappa_d\varkappa)}\int\limits_0^\infty\vartheta_d(\tau)\,e^{-\varkappa^2a^2\tau}\,d\tau\,.$$

Hier heben sich wegen (12) die beiden letzten Summanden auf der rechten Seite gegeneinander

weg, und es bleibt

$$\vartheta(0,t) - \varkappa_0 \frac{\partial \vartheta}{\partial z}(0,t) = \frac{a^2}{\pi i} \int\limits_{L_\varkappa} e^{a^2 \varkappa^2 t} \varkappa \, d\varkappa \int\limits_0^\infty \vartheta_0(\tau) e^{-a^2 \varkappa^2 \tau} \, d\tau .$$

Dies aber liefert nach (11):

$$\vartheta(0,t) - \varkappa_0 \frac{\partial \vartheta}{\partial z}(0,t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_\gamma} e^{\gamma t} \, d\gamma \int\limits_0^\infty \vartheta_0(\tau) \, e^{-\gamma \tau} \, d\tau \equiv \vartheta_0(t) \tag{17}$$

nach bekannten Sätzen über die *Laplace*-Transformation[1]. Also wird die Randbedingung (6) durch (9) erfüllt.

Mit Hilfe von (16) ergibt sich ferner aus (9), daß dort bei der Bildung von $\vartheta(d,t) + \varkappa_d \frac{\partial \vartheta}{\partial z}(d,t)$ der erste Summand verschwindet, da sich $e^{-2\varkappa d}\,\varepsilon(\varkappa) - 1$ im Zähler und Nenner des Integranden weghebt und der Integrationsweg $L_\varkappa$ für $t \neq 0$ in die imaginäre Achse verlagert werden kann, also $L_{-\varkappa}$ die Integration über die imaginäre Achse in entgegengesetzter Richtung bedeutet. Vom zweiten Summanden in (9) bleibt nur das Residuum bei $\varkappa = 0$ übrig. Dieses ist nach (14) und (16) $\frac{\varkappa_d}{a^2} \int\limits_0^d f(\xi_2)\, d\xi_2 + \frac{1}{a^2} \int\limits_0^d d\xi_1 \int\limits_0^{\xi_1} f(\xi_2)\, d\xi_2$, hebt sich also bei der Bildung von $\vartheta(d,t) + \varkappa_d \frac{\partial \vartheta}{\partial z}(d,t)$ gegen den letzten Summanden von (9) fort, sodaß schließlich nur noch bleibt:

$$\vartheta(d,t) + \varkappa_d \frac{\partial \vartheta}{\partial z}(d,t) = -\frac{a^2}{\pi i} \int\limits_{L_\varkappa + L_{-\varkappa}} \frac{e^{a^2 \varkappa^2 t} \varkappa \, d\varkappa \, (e^{-\varkappa d} - e^{-\varkappa d} \varkappa \varkappa_d)}{(e^{-2\varkappa d}\,\varepsilon(\varkappa) - 1)(1 + \varkappa_0 \varkappa)} \int\limits_0^\infty \vartheta_0(\tau)\, e^{-\varkappa^2 a^2 \tau} \, d\tau$$

$$- \frac{a^2}{\pi i} \int\limits_{L_\varkappa + L_{-\varkappa}} \frac{e^{a^2 \varkappa^2 t} \varkappa \, d\varkappa \, (1 + \varkappa \varkappa_d)}{(e^{-2\varkappa d}\,\varepsilon(\varkappa) - 1)(1 + \varkappa \varkappa_d)} \int\limits_0^\infty \vartheta_d(\tau)\, e^{-\varkappa^2 a^2 \tau} \, d\tau .$$

Hier verschwindet nun der erste Summand, wie man wieder durch Verwandlung des $\int\limits_{L_\varkappa}$ in $\int\limits_{L_{-\varkappa}}$ zeigt, und der zweite Summand ist aus denselben Gründen, wie sie oben beim Nachweis der Erfüllung der Randbedingungen bei $z = 0$ dargelegt wurden, identisch mit $\vartheta_d(t)$, womit dann gezeigt ist, daß (9) auch die Randbedingung (7) erfüllt.

Nachdem so (9) als geschlossene Lösung des allgemeinen inhomogenen Wärmeleitungsproblems erwiesen ist, handelt es sich jetzt darum, die eingangs erwähnte Endbedingung — $\vartheta(z,t)$ soll zu einer vorgeschriebenen Zeit $t = t_g$ einen vorgeschriebenen Temperaturverlauf

$$\vartheta(z, t_g) = g(z) \tag{18}$$

annehmen — mit Hilfe von (9) zu formulieren. Damit (18) lösbar ist, wird von $g(z)$ gefordert, daß es zweimal stetig differenzierbar ist und die folgenden Bedingungen erfüllt, die aus den Randbedingungen (6), (7) hervorgehen:

$$\vartheta_0(t_g) - g(0) = -\varkappa_0 \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)_{z=0}, \tag{19}$$

$$\vartheta_d(t_g) - g(d) = \varkappa_d \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)_{z=d}. \tag{20}$$

Zur Aufstellung der Endbedingung soll (9) umgeformt werden in der Absicht, eine Gleichung zu erhalten, welche $g(z), f(z), \vartheta_0(t), \vartheta_d(t)$ in ihrer gegenseitigen Abhängigkeit leicht auswertbar enthält.

In (9) tritt in den ersten drei Summanden der gleiche Nenner $e^{-2\varkappa d}\varepsilon(\varkappa) - 1$ auf. An seinen Nullstellen $\varkappa_n$, welche also der Gleichung

$$A(\varkappa) = e^{-2\varkappa d} \frac{(1 - \varkappa_0 \varkappa)(1 - \varkappa_d \varkappa)}{(1 + \varkappa_0 \varkappa)(1 + \varkappa_d \varkappa)} - 1 = 0 \qquad \begin{pmatrix} \varkappa_0 \neq \infty, \\ \varkappa_d \neq \infty. \end{pmatrix} \tag{21}$$

genügen, liegen jedenfalls Singularitäten der Integranden. $\varkappa = 0$ ist Nullstelle, die übrigen Null-

[1] *Courant-Hilbert*, a. a. O,. S. 202ff.

stellen müssen verschwindende Realteile haben, denn sonst könnte der Betrag von $e^{-2\varkappa_n d}\varepsilon(\varkappa_n)$ nicht gleich 1 sein, d. h. man kann setzen

$$\varkappa_n = i\,\alpha_n \text{ mit } \alpha_n \text{ reell und } \alpha_{-n} = -\alpha_n\,, \tag{22}$$

da mit $\varkappa_n$ auch $\varkappa_{-n} = -\varkappa_n$ eine Nullstelle ist. n durchläuft alle ganzen Zahlen von 1 bis $+\infty$, da, wie man nach leichter Umformung von $e^{-2\varkappa_n d}\varepsilon(\varkappa_n) = 1$ erkennt, α_n der transzendenten Gleichung genügt

$$tg\,\alpha_n\,d = \frac{\alpha_n(\varkappa_0 + \varkappa_d)}{\alpha_n^2\,\varkappa_0\varkappa_d - 1}\,, \tag{23}$$

welche abzählbar unendlich viele beliebig große Lösungen besitzt. Da für die folgenden allgemeinen Betrachtungen die Kenntnis obiger Eigenschaften der $\varkappa_n$ genügt, braucht hier auf die Möglichkeit der graphischen Ermittlung der α_n aus (23) im konkreten Falle nur hingewiesen zu werden[1].

Wegen der Lage der $\varkappa_n$ auf der imaginären Achse lassen sich der erste und zweite Summand in (9) für $t \neq 0$ in Summen über die Residuen der Integranden an den Nullstellen des Nenners verwandeln, gekennzeichnet durch das Symbol $\sum \oint$. Bezeichnet man also die vier Summanden in (9) der Reihe nach mit I, II, III, IV, so wird

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{I} + \mathrm{II} = \frac{1}{2\pi i}\sum \oint \frac{e^{a^2\varkappa^2 t}\,d\varkappa\,E_\varkappa(z)}{e^{-2\varkappa d}\,\varepsilon(\varkappa) - 1} \int_0^d q(\xi)\,e^{-\varkappa\xi}\,d\xi + \frac{1}{2\pi i\,a^2}\sum \oint \frac{e^{a^2\varkappa^2 t}\,d\varkappa\,E_\varkappa(z)}{\varkappa^2\left(e^{-2\varkappa d}\,\varepsilon(\varkappa) - 1\right)} \\ \times \int_0^d f(\xi)\,e^{-\varkappa\xi}\,d\xi\,. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Wegen

$$\frac{d}{d\varkappa}\left(e^{-2\varkappa d}\,\varepsilon(\varkappa) - 1\right)_{\varkappa=\varkappa_n} = -2\,d - \frac{2(\varkappa_0 + \varkappa_d)\,(1 - \varkappa_0\,\varkappa_d\,\varkappa_n^2)}{(1 - \varkappa_0\,\varkappa_n^2)\,(1 - \varkappa_d\,\varkappa_n^2)} = -N(\varkappa_n) \tag{25}$$

mit der Abkürzung $E_{\varkappa_n}(z) = E_n(z)$ erhält man dann aus (24)

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{I} + \mathrm{II} = \sum_{\varkappa=-\infty}^{\varkappa=+\infty} \frac{e^{a^2\varkappa_n^2 t}\,E_n(z)}{-N(\varkappa_n)} \int_0^d q(\xi)\,e^{-\varkappa_n\xi}\,d\xi \\ + \frac{1}{a^2}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}{}' \frac{e^{a^2\varkappa_n^2 t}\,E_n(z)}{-\varkappa_n^2\,N(\varkappa_n)} \int_0^d f(\xi)\,e^{-\varkappa\xi}\,d\xi + \frac{1}{2\pi i\,a^2}\oint_{\varkappa=0} \frac{e^{a^2\varkappa^2 t}\,d\varkappa\,E_\varkappa(z)}{\varkappa^2\left(e^{-2\varkappa d}\,\varepsilon(\varkappa) - 1\right.} \int_0^d f(\xi)e^{-\varkappa\xi}\,d\xi\,. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Die Entwicklung des Integranden des dritten Summanden nach Potenzen von $\varkappa$ liefert unter Weglassung uninteressanter Glieder

$$\frac{1}{a^2\,\varkappa\,N(0)}\left[\int_0^d f(\xi)\,d\xi\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E_\varkappa}{\partial\varkappa^2} - \frac{1}{2\,N(0)}\frac{\partial E_\varkappa}{\partial\varkappa}\frac{d^2A}{d\varkappa^2}\right)_{\varkappa=0} + \left(\frac{\partial E_\varkappa}{\partial\varkappa}\right)_{\varkappa=0}\int_0^d \xi\,f(\xi)\,d\xi\right].$$

Hierin bedeuten nach (10) und (21)

$$\left(\frac{\partial E_\varkappa}{\partial\varkappa}\right)_{\varkappa=0} = -2\,(z + \varkappa_0)\,, \tag{27}$$

$$\left(\frac{\partial^2 E_\varkappa}{\partial\varkappa^2}\right)_{\varkappa=0} = 4\,\varkappa_0(z + \varkappa_0)\,, \tag{28}$$

$$\left(\frac{d^2A}{d\varkappa^2}\right)_{\varkappa=0} = N^2(0)\,; \tag{29}$$

also liefert der dritte Summand in (26)

$$\frac{2(z + \varkappa_0)}{a^2\,N(0)}\left(\varkappa_d\int_0^d f(\xi)\,d\xi + \int_0^d d\xi_1\int_0^{\xi_1} f(\xi_2)\,d\xi_2\right). \tag{30}$$

[1] Vgl. dazu die Lösung von (23) für $\varkappa_0 = \varkappa_d$ bei *M. Planck*, Theorie der Wärme, S. 135ff., Leipzig 1932.

Die ersten beiden Summanden in (26) lassen sich leicht in Summen über $n = 1$ bis $n = +\infty$ umformen, wenn man bedenkt, daß

$$E_{-n}(z) = -\frac{1+\varkappa_0\varkappa_n}{1-\varkappa_0\varkappa_n} E_n(z) \tag{31}$$

ist und die $E_n(z)/\sqrt{N(\varkappa_n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ein vollständiges, normiertes Orthogonalsystem bilden, in dem mit

$$E_n^q = \int_0^d q(\xi) \frac{E_{-n}(\xi)}{\sqrt{N(\varkappa_n)}} d\xi\,, \qquad E_n^f = \int_0^d f(\xi) \frac{E_{-n}(\xi)}{\sqrt{N(\varkappa_n)}} d\xi \tag{32}$$

die n-ten Komponenten von $q(z), f(z)$ bezeichnet werden mögen[1]. Dann wird zusammen mit (30):

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{I}+\mathrm{II} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{a^2\varkappa_n^2 t} \frac{E_n(z)}{\sqrt{N(\varkappa_n)}} E_n^q + \frac{1}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{a^2\varkappa_n^2 t}}{\varkappa_n^2} \cdot \frac{E_n(z)}{\sqrt{N(\varkappa_n)}} E_n^f \\ + \frac{2(z+\varkappa_0)}{a^2 N(0)}\left(\varkappa_d \int_0^d f(\xi)\, d\xi + \int_0^d d\xi_1 \int_0^{\xi_1} f(\xi_2)\, d\xi_2\right). \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Da sich nun oben beim Beweis der Gültigkeit der Randbedingungen gezeigt hat, daß II + IV bei Anwendung der Operatoren $1-\varkappa_0\,\partial/\partial z$ bzw. $1+\varkappa_d\,\partial/\partial z$ an den Rändern $z = 0$ und $z = d$ verschwindet, dies aber auch wegen (15) und (16) für $E_n(z)$ zutrifft, so ist wegen des Entwicklungssatzes II + IV nach $E_n(z)/\sqrt{N(\varkappa_n)}$ entwickelbar, d. h. es sind in (33) noch der letzte Summand und IV in diesen Eigenfunktionen auszudrücken. Eine längere, aber einfache Rechnung, die hier übergangen sei, lehrt dann, daß

$$\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{IV} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{a^2\varkappa_n^2 t} \frac{E_n(z)}{\sqrt{N(\varkappa_n)}} E_n^q + \frac{1}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varkappa_n^2} \frac{E_n(z)}{\sqrt{N(\varkappa_n)}} E_n^f\left(e^{a^2\varkappa_n^2 t} - 1\right). \tag{34}$$

Bleibt noch der Summand III in (9). Man sieht sofort, daß es die Integrale $\int_0^{\infty}$ sind, welche einer Verlagerung des Integrationsweges in die imaginäre Achse im Wege stehen. Teilt man aber auf: $\int_0^{\infty} = = \int_0^{t} + \int_t^{\infty}$, so kann man zeigen, daß der vom zweiten Integral herrührende Bestandteil für alle z aus einem abgeschlossenen Intervall in $0 < z < d$ verschwindet und also nur der vom ersten Summanden herrührende Bestandteil übrig bleibt, welcher die gewünschte Verlagerung zuläßt. Es wird also behauptet, daß

$$-\frac{a^2}{\pi i} \int_{L_\varkappa + L_{-\varkappa}} \frac{e^{a^2\varkappa^2 t}\,\varkappa\, d\varkappa}{e^{-2\varkappa d}\,\varepsilon(\varkappa) - 1}\left(\frac{e^{-\varkappa z}}{1+\varkappa_0\varkappa}\int_t^{\infty} \vartheta_0(\tau)\, e^{-\varkappa^2 a^2\tau}\, d\tau + \frac{e^{-\varkappa(d-z)}}{1+\varkappa_d\varkappa}\int_t^{\infty} \vartheta_d(\tau)\, e^{-\varkappa^2 a^2\tau}\, d\tau\right) = 0 \tag{35}$$

gilt für $z \neq 0, d$. Zum Beweise, der zunächst für den Wegbestandteil $L_\varkappa$ geführt werde, führe man entsprechend (11) $\gamma = a^2\varkappa^2$ ein mit $\varkappa = \varkappa_r + i\,\varkappa_i$ und also

$$\varkappa_r = \frac{1}{\sqrt{2}\,a}\sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\,; \qquad \varkappa_i^2 = \varkappa_r^2 - \frac{\alpha}{a^2}, \tag{36}$$

d. h. $\varkappa_r \to \frac{1}{\sqrt{2}\,a}\sqrt{|\beta|}$ für $|\beta| \to \infty$. Dann ergibt sich für den Absolutbetrag des $\int_L$ in (35)

$$\left|\frac{a^2}{\pi}\int_{L_\varkappa}\right| \leq \frac{a^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha t}\, d\beta}{|e^{-2\varkappa d}\,\varepsilon(\varkappa) - 1|}\left(\frac{e^{-\varkappa_r z}\int_t^{\infty} |\vartheta_0(\tau)|\, e^{-\tau\alpha}\, d\tau}{\sqrt{(1+\varkappa_0\varkappa_r)^2 + (1+\varkappa_0\varkappa_i)^2}} + \frac{e^{-\varkappa_r(d-z)}\int_t^{\infty} |\vartheta_d(\tau)|\, e^{-\alpha\tau}\, d\tau}{\sqrt{(1+\varkappa_d\varkappa_r)^2 + (1+\varkappa_d\varkappa_i)^2}}\right).$$

Nun hat $|e^{-2\varkappa d}\varepsilon(\varkappa) - 1|$ für $\alpha > \alpha_0 > 0$ und β zwischen den Integralgrenzen sicher einen kleinsten positiven Wert B. Die Wurzeln in den Nennern sind sicher größer oder gleich 1, wobei das

[1] Die $E_n(z)$ sind nämlich Eigenfunktionen des Problems $\frac{d^2E_\varkappa}{dz^2} = \varkappa^2 E_\varkappa$ mit den Randbedingungen $E_\varkappa - \varkappa_0\frac{dE_\varkappa}{dt} = 0$ bei $z = 0$ und $E_\varkappa + \varkappa_d\frac{dE_\varkappa}{dz} = 0$ bei $z = d$. Dies aber bedeutet nach (15) und (16), daß $\varkappa = \varkappa_n$ die Eigenwerte sind. Daraus folgt auch die Vollständigkeit der $E_n(z)$.

Gleichheitszeichen bei $\varkappa_0 = \varkappa_d = 0$ sogar für den ganzen Integrationsweg gilt. Es ist also

$$\left|\frac{a^2}{\pi}\int\limits_{L_\varkappa}\right| \leq \frac{a^2}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\beta\, e^{-\varkappa_r z}\left(\int\limits_i^\infty |\vartheta_0(\tau)|\, e^{\alpha(t-\tau)}\, d\tau + e^{-\varkappa_r(d-z)}\int\limits_i^\infty |\vartheta_d(\tau)|\, e^{\alpha(t-\tau)}\, d\tau\right). \tag{37}$$

Hier kann man nun bei Betrachtung des ersten Summanden für $z \neq 0$ nach (36) setzen

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\beta\, e^{-\varkappa_r z} = 2\int\limits_0^\infty e^{-\varkappa_r z}\, d\beta = 2\int\limits_0^\infty e^{-\frac{1}{\sqrt{2}\,a}\sqrt{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\,z}\, d\beta\,.$$

Mit Hilfe der Substitution $\tau = \sqrt{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ gelangt man dann für hinreichend große α zu der Abschätzung

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\beta\, e^{-\varkappa_r z} < 4\, e^{-\frac{z}{a}\sqrt{\alpha}}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\frac{z\sigma}{\sqrt{2}\,a}}}{\sqrt{\sigma}}\left(\sigma^2 + 2\sqrt{2\alpha}\cdot\sigma + 2\alpha\right) d\sigma\,.$$

Man sieht also, daß für $z \neq 0$ das linke Integral verschwindet, da auch die rechte Seite für $\alpha \to \infty$ zu Null wird. Das Integral $\int\limits_i^\infty |\vartheta_0(\tau)|\, e^{-\alpha(\tau-t)}\, d\tau$ in (37) bleibt jedenfalls wegen der Voraussetzungen (8) unter einer von α unabhängigen Schranke, womit dann das Verschwinden des ersten Summanden in (37) nachgewiesen ist. Dasselbe zeigt man auch für $z \neq d$ von dem zweiten Summanden mit genau denselben Mitteln wie eben. In III aus (9) läßt sich dann aber der Integrationsweg in einen solchen um die Nullstellen des Nenners auf der imaginären Achse verlagern, sodaß sich zusammen mit (34) für $t > 0$, $0 < z < d$ aus (9) ergibt:

$$\left.\begin{aligned}\vartheta(z,t) = {} & \sum_{n=1}^{\infty} e^{a^2\varkappa_n^2 t}\,\frac{E_n(z)}{\sqrt{N(\varkappa_n)}}\,E_n^\varphi + \frac{1}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\varkappa_n^2}\,\frac{E_n(z)}{\sqrt{N(\varkappa_n)}}\,E_n^f\left(e^{a^2\varkappa_n^2 t}-1\right)\\ & + 2\,a^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{a^2\varkappa_n^2 t}\,\varkappa_n}{N(\varkappa_n)}\,E_n(z)\left(\frac{1}{1-\varkappa_0\varkappa_n}\int\limits_0^t \vartheta_0(\tau)\, e^{-a^2\varkappa_n^2\tau}\, d\tau - \frac{e^{-\varkappa_n d}}{1+\varkappa_d\varkappa_n}\int\limits_0^t \vartheta_d(\tau)\, e^{-\varkappa_n^2 a^2\tau}\, d\tau\right).\end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Die Funktion $g(z)$ der Endbedingung (18) muß nun (38) für $t = t_g$, $0 < z < d$ genügen. Wenn die Entwicklung des $g(z)$ nach den $E_n(z)$ gleichmäßig in z konvergiert, was angenommen werden soll bzw. im Einzelfall nachgewiesen werden muß, so folgt aus der Vollständigkeit des Systems der $E_n(z)$, daß diese Entwicklung jedenfalls in $0 < z < d$ die Funktion $g(z)$ auch wirklich eindeutig darstellt und (38) also in den Komponenten der $E_n(z)$ geschrieben werden kann. Das liefert schließlich die gewünschte auswertbare Endbedingung (E_n^g sind die Komponenten von $g(z)$)

$$\left.\begin{aligned}E_n^g = {} & e^{a^2\varkappa_n^2 t_g}\,E_n^\varphi + \frac{E_n^f}{a^2\varkappa_n^2}\left(e^{a^2\varkappa_n^2 t_g}-1\right)\\ & + \frac{2\,a^2\varkappa_n\, e^{a^2\varkappa_n^2 t_g}}{\sqrt{N(\varkappa_n)}}\left(\frac{1}{1-\varkappa_0\varkappa_n}\int\limits_0^{t_g}\vartheta_0(\tau)\, e^{-\varkappa_n^2 a^2\tau}\, d\tau - \frac{e^{-\varkappa_n d}}{1+\varkappa_d\varkappa_n}\int\limits_0^{t_g}\vartheta_d(\tau)\, e^{-\varkappa_n^2 a^2\tau}\, d\tau\right).\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Sind $\varphi, f, \vartheta_0, \vartheta_d$ gegeben und g gesucht, so liefert (39) natürlich nichts Neues. Es ist dann $\vartheta(z, t_g) = g(z)$ nach (9), und die Bedingungen (19), (20) sind erfüllt. Schreibt man aber $g(z)$ vor, so stellt (39) eine notwendige Bedingung dar, der dann $\varphi, f, \vartheta_0, \vartheta_d$ gehorchen müssen. Im allgemeinen wird (39) nicht ausreichen, um diese Funktionen zu bestimmen. Sind aber drei von ihnen gegeben, so wird sich die vierte aus (39) bestimmen lassen. Wenn unter den drei gegebenen ϑ_0 und ϑ_d sind, so ist die vierte eindeutig bestimmbar. Ihre Existenz ist auch dann allerdings noch an den Nachweis der Konvergenz der Reihenentwicklung nach den Eigenfunktionen geknüpft. Ist aber ϑ_0 oder ϑ_d gesucht, so zeigt (39), daß im Einzelfall noch eine weitere Behandlung dieser Gleichung nötig wird. Diese hat sich dann darauf zu gründen, daß $\int\limits_0^{t_g}\vartheta(\tau)\, e^{\alpha_n^2 a^2\tau}\, d\tau$ unter der eingangs gemachten Annahme der Endlichkeit von $\vartheta(\tau)$ mit α_n über alle Grenzen wächst, es sei denn, daß $\vartheta(\tau)$

identisch verschwindet. Es wird so z. B. weiter unten gezeigt werden, daß im Falle der Wärmeproduktion $f(z)$ durch spezielle quasistationäre elektromagnetische Felder und unter der Forderung einer konstanten Endtemperatur $g(z) = \vartheta^0$ die Funktionen φ, ϑ_0, ϑ_d sogar eindeutig durch (39) bestimmt sind. Auf weitere Kombinationsmöglichkeiten, daß z. B. zwei der im Spiele stehenden fünf Funktionen gesucht werden, während drei gegeben sind, usw., mag hier nur hingewiesen werden. Wegen der bisher noch völlig allgemein gelassenen Wärmeproduktion $f(z)$ umschließt (39) natürlich auch Fälle, in denen diese nicht durch elektromagnetische Felder geleistet werden kann oder mindestens die neue Aufgabe entsteht, eine aus (39) gewonnene Wärmeproduktion durch solche Felder zu approximieren. Es soll hierfür noch ein einfaches, anschauliches Beispiel gegeben werden. Legt man, ausgehend von der Anfangstemperatur $\varphi(z) = 0$ die beiden Begrenzungsflächen der Platte auf die konstante Temperatur ϑ^0, so muß sich nach unendlich langer Zeit die Platte überall auf die Temperatur ϑ^0 erwärmen. Stellt man sich aber die Aufgabe, dies schon zu der beliebig vorgegebenen Zeit $t = t_g$ zu erreichen, so erhält man aus (39) eindeutig nach etwas Rechnung ($\varkappa_0 = \varkappa_d = 0$) die Wärmeproduktion

$$f(z) = \frac{4\,a^2\,\pi\,\vartheta^0}{d^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2\,n+1) \sin (2\,n+1)\,\frac{\pi\,z}{d} \left[e^{\frac{(2\,n+1)^2\,\pi^2\,a^2\,t_g}{d^2}} - 1 \right]^{-1} \tag{40}$$

und damit aus (9)

$$\vartheta(z,t) = \vartheta^0 + \frac{4\,\vartheta^0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2\,n+1)\,\frac{\pi\,z}{d}}{2\,n+1} \left[e^{\frac{(2\,n+1)^2\,\pi^2\,a^2\,t_g}{d^2}} - 1 \right]^{-1} \left(1 - e^{\frac{(2\,n+1)^2\,\pi^2\,a^2}{d^2}\,(t_g - t)} \right). \tag{41}$$

Man sieht aus diesen Ausdrücken sofort, daß $f(z) = 0$ für $t_g = \infty$ und $\vartheta(z, t_g) = \vartheta^0$ wie verlangt wurde. Überdies kann man auch zeigen, daß stets $\vartheta(z,t) < \vartheta(z, t_g)$. Inwieweit man das gefundene $f(z)$ durch elektromagnetische Felder oder vielleicht als atomare Wärmeproduktion realisieren kann, soll hier nicht untersucht werden. Jedenfalls ist (40) mit einem quasistationären Wechselfeld in einem Dielektrikum geringen Verlustfaktors unverträglich, wie man aus dem Folgenden entnehmen wird.

Es muß noch auf den in (21)ff. ausgeschlossenen singulären Fall eingegangen werden, daß $\varkappa_0$, $\varkappa_d$ einzeln oder beide unendlich groß sind.

Trifft dies zu, also $\varkappa_0 = \varkappa_d = \infty$, so liegt bei $z = 0$ und $z = d$ nach (6) und (7) die adiabatische Randbedingung vor, und das Orthogonalsystem der $E_n(z)/\sqrt{N(\varkappa_n)}$ muß für $\varkappa_n = 0$ bei $n = 0$ durch

$$\frac{E_0}{\sqrt{N(0)}} = \frac{1}{\sqrt{d}} \tag{42}$$

zu einem vollständigen ergänzt werden. Im ersten Summanden der rechten Seite von (34) ist dann die Summation von $n = 0$ bis $n = \infty$ zu erstrecken. Für das Residuum von II in (9) an der Stelle $\varkappa = 0$ erhält man statt (30) den Ausdruck

$$\frac{1}{a^2}\,Res^{II}_{\varkappa=0} = \int_0^d f(\xi)\,d\xi \left[\frac{z^2}{2\,a^2\,d} - \frac{d}{6\,a^2} + \frac{t}{d} \right] + \frac{1}{a^2\,d} \int_0^d d\xi \int_0^{\xi} d\xi_1 \int_0^{\xi_1} f(\xi_2)\,d\xi_2\,. \tag{43}$$

Die Summe von (43) und IV aus (9) genügt nun, wie man sofort sieht, der Randbedingung $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ bei $z = 0$ und $z = d$, ist also nach dem durch (42) erweiterten System der $E_n(z)/\sqrt{N(\varkappa_n)}$ entwickelbar:

$$(43) + \mathrm{IV} = \frac{t}{d} \int_0^d f(z)\,dz - \frac{1}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n(z)}{\sqrt{N(\varkappa_n)}}\,\frac{E_n^f}{\varkappa_n^2} \tag{44}$$

mit $N(\varkappa_n) = 2\,d$ nach (25).

Man erhält also schließlich für $\varkappa_0 = \varkappa_d = \infty$ statt (38), da III in (9) wegfällt,

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_{ad}(z,t) = \frac{1}{d} \int_0^d \varphi(z)\,dz + \frac{t}{d} \int_0^d f(z)\,dz + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} e^{a^2 \varkappa_n^2 t}\,\frac{E_n(z)}{\sqrt{N(\varkappa_n)}}\,E_n^{\varphi} + \frac{1}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varkappa_n^2}\,\frac{E_n^f\,E_n(z)}{\sqrt{N(\varkappa_n)}} \left(e^{a^2 \varkappa_n^2 t} - 1 \right). \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Wie man sieht, unterscheidet sich dieser Ausdruck für den beiderseitig adiabatischen Fall vom allgemeinen Fall in (38) nur durch das Hinzukommen eines in t linearen Summanden, der bei $t \to \infty$ allein für die Temperaturverteilung in der Platte maßgebend ist. Ein mit t wachsendes Glied muß hier bei ununterbrochener Wärmeproduktion ja auch anschaulich physikalisch erwartet werden. Nach (19) und (20) wird für die Entdemperaturverteilung verlangt:

$$\frac{\partial g}{\partial z} = 0 \quad \text{bei} \quad z = 0 \quad \text{und} \quad z = d\,, \tag{46}$$

und zu der Endbedingung (39) mit entfallenden ϑ-Gliedern tritt die weitere Bedingung

$$\int_0^d g(z)\,dz = \int_0^d q(z)\,dz + t_g \int_0^d f(z)\,dz\,. \tag{47}$$

Ist nur $\varkappa_0 = \infty$ aber $\varkappa_d$ endlich, so lehrt eine Betrachtung, die Schritt für Schritt der eben durchgeführten analog ist, daß (38) und (39) bestehen bleiben, wobei aber die $\vartheta_0(\tau)$ enthaltenden Glieder wegfallen ebenso wie in (9). Dasselbe gilt auch im Falle $\varkappa_d = \infty$, aber $\varkappa_0$ endlich, nur daß hier die Glieder mit $\vartheta_d(\tau)$ in (38). (39), (9) zu streichen sind.

3. Die Wärmeproduktion in einem Dielektrikum geringen Verlustfaktors durch quasistationäre Wechselfelder. Hier soll die Frage beantwortet werden, wie denn ein quasistationäres Wechselfeld aussehen muß, damit es in der dielektrisch angenommenen Platte die Wärmeproduktion $f(z)$ liefert, bzw. welche $f(z)$ mit einem solchen Felde verträglich sind. Die in dem Volumenelement dV der Platte in der Zeit dt produzierte Wärme ist nach der *Maxwell*schen Theorie ganz allgemein $\sigma \mathfrak{E}^2 dV dt$, wobei σ die Leitfähigkeit und $\mathfrak{E}$ die elektrische Feldstärke bedeuten. Mit diesem Ansatz bei einem leitfähigen Dielektrikum durchzukommen ist aber nur so möglich, daß man $\mathfrak{E}$ sinusförmig mit der Zeit t schwanken läßt und dann im Falle isotroper Stoffe, um die es sich hier nur handeln soll, σ ebenso wie die Dielektrizitätskonstante ε noch von der Frequenz abhängig annimmt. Die Dispersion von σ und ε ist experimentell ermittelt zu denken. Durch zeitliche Mittelung erhält man dann für die pro Sekunde und ccm erzeugte Wärme $\sigma \mathfrak{E}^2$, wobei hier $\mathfrak{E}$ nur noch von den Raumkoordinaten abhängt und sein Betrag gleich dem $\frac{1}{\sqrt{2}}$-fachen des Scheitelwertes der Feldstärke ist. Nimmt man ferner den Verlustfaktor des dielektrischen Plattenmaterials nicht zu hoch an, so daß $\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} \Phi$ gilt, man also wie mit einem statischen Felde in einem idealen Isolator operieren kann, so gelten die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0\,, \qquad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2 = c\,f(z)\,, \tag{48}$$

wobei c eine positive Konstante ist. Es wird sich zeigen, daß (48) nur für bestimmte $\Phi(x.\ z)$ und $f(z)$ möglich ist, welche es jetzt zu bestimmen gilt.

Unter der Annahme eines differenzierbaren $f(z)$, folgt durch Differentiation der zweiten Gleichung (48) nach z und x

$$\left.\begin{aligned} \Phi_x \Phi_{xx} + \Phi_z \Phi_{zx} &= 0\,, \\ 2\,\Phi_x \Phi_{xz} + 2\,\Phi_z \Phi_{zz} &= c\,f_z\,. \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Zusammen mit der ersten Gleichung (48) folgt weiter aus (49) wegen $\Phi_{zx} = \Phi_{xz}$ unter der Voraussetzung $\Phi_z \neq 0$ das Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned} 2 \cdot \Phi_z \Phi_{zz} - 2 \cdot \frac{\Phi_x^2}{\Phi_z} \Phi_{xx} &= c\,f_z\,, \\ 1 \cdot \Phi_{zz} + 1 \cdot \Phi_{xx} &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Da die Determinante proportional $f(z)$ ist, dies aber $\neq 0$ sein soll, ist (50) lösbar zu

$$\Phi_{zz} = \frac{f_z\,\Phi_z}{2f}\,, \qquad \Phi_{xx} = -\frac{f_z\,\Phi_z}{2f}\,. \tag{51}$$

Hier entnimmt man aus der ersten Gleichung

$$\Phi_z = c_1(x)\sqrt{f}\,. \tag{52}$$

Zusammen mit (48) und $\Phi_{zx} = \Phi_{xz}$ folgt aber dann

$$\frac{f_z}{2f} = \frac{c_1 x}{\sqrt{c - c_1^2}} \quad \text{mit} \quad c_1^2(x) < c \quad \text{wegen} \quad \Phi_x^2 = (c - c_1^2) f + 0\,, \tag{53}$$

und hieraus entnimmt man, da die linke und rechte Seite nur einer gemeinsamen Konstanten $k/2$ gleich sein können:

$$f(z) = k_1\, e^{k z}\,. \tag{54}$$

Die Potentialfunktion Φ läßt sich herleiten, wenn man nach (53) integriert:

$$\int^{x} \frac{c_1 \xi}{\sqrt{c - c_1^2}}\, d\xi = \frac{k}{2}\, x + k_2 = -\arccos \frac{c_1(x)}{\sqrt{c}}\,. \tag{55}$$

Nach (52) und (53) erhält man damit die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \Phi_z &= \sqrt{c} \cos\left(\frac{k}{2}\, x + k_2\right) \cdot \sqrt{f}\,, \\ \Phi_x &= -\sqrt{f}\,\sqrt{c} \sin\left(\frac{k}{2}\, x + k_2\right), \end{aligned}\right| \tag{56}$$

also

$$\Phi = k_3 \int^{z} \sqrt{f}\, d\xi + \frac{2\sqrt{f}}{k}\left[\sqrt{c} \cos\left(\frac{k}{2}\, x + k_2\right) - k_3\right] + k_4\,. \tag{57}$$

Man bestätigt umgekehrt sofort, daß (57) die Gleichungen (48) tatsächlich löst. Setzt man $f(z)$ aus (54) in (57) ein, so erhält man schließlich

$$\Phi = \frac{2}{k} \sqrt{k_1 c}\, e^{\frac{k}{2} z} \cos\left(\frac{k}{2}\, x + k_2\right) + k_4\,. \tag{58}$$

Ist $k = 0$, so entnimmt man aus (54), daß eine konstante Wärmeproduktion vorliegt, für welche nach (56) Φ_x und Φ_z konstant sind, Φ also ein homogenes Feld liefert:

$$\Phi = \sqrt{c} \cos k_2 \cdot \sqrt{k_1}\, z - \sqrt{c} \sin k_2 \cdot \sqrt{k_1}\, x + k_4\,. \tag{59}$$

Die dielektrische Erwärmung durch eine innere Wärmeproduktion, welche allein von z abhängt, ist also keinesfalls auf homogene Felder beschränkt mit $f(z) = \text{konst}$. Vielmehr ist dies nur — mit $\sin k_2 = 0$ — der praktisch naheliegendste Fall, weil die Elektrodenflächen dann mit den Begrenzungsflächen der Platte zusammenfallen. Die Anwendungsmöglichkeiten von Elektrodenflächen $\Phi = \text{konst}$. nach (58) und (59) sollen hier, wo es sich nur um das Grundsätzliche handelt, nicht diskutiert werden. Dagegen sollen noch die allgemeine Lösung (9) der Wärmeleitungsgleichung und die Endbedingung (39) für das gefundene $f(z)$ ausgewertet werden.

4. Der Temperaturverlauf und die Endbedingung bei $f(z) = k_1\, e^{k z}$. Obwohl eben $f(z) = k_1\, e^{k z}$ nur für ein Dielektrikum geringen Verlustfaktors hergeleitet wurde, tritt eine solche Wärmeproduktion doch auch in anderen wichtigen Anwendungen auf. Man denke etwa an eine Stahlplatte, welche einseitig durch induzierte Wirbelströme erwärmt und dann durch Abschrecken gehärtet werden soll oder eine absorbierte ebene Welle. Zunächst findet man aus (9) die Antwort auf die Frage, wie die Temperatur sich mit der Zeit und dem Ort ändert, wenn die Anfangsbedingung und die Randbedingungen gegeben sind. Man hat nach (33) E_n^f zu bilden und $f(z)$ in IV aus (9) einzusetzen. Es ist unter Zuhilfenahme von (21)

$$E_n^f = \frac{k_1}{\sqrt{N(\varkappa_n)}} \int_0^d e^{k z}\, E_{-n}(z) \cdot dz = \frac{2\,\varkappa_n\, k_1}{(k^2 - \varkappa_n^2)\sqrt{N(\varkappa_n)}} \left(\frac{1 - \varkappa_0 k}{1 - \varkappa_0 \varkappa_n} - \frac{1 + \varkappa_d k}{1 + \varkappa_d \varkappa_n}\, e^{(k - \varkappa_n) d}\right) \tag{60}$$

und also nach (34) und (9)

$$\left.\begin{aligned} \vartheta(z, t) = {} & \sum_{n=1}^{\infty} e^{a^2 \varkappa_n^2 t}\, \frac{E_n(z)}{\sqrt{N(\varkappa_n)}}\, E_n^q + \frac{2\, k_1}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n(z)\left(e^{a^2 \varkappa_n^2 t} - 1\right)}{N(\varkappa_n)(k^2 - \varkappa_n^2)\,\varkappa_n} \left(\frac{1 - \varkappa_0 k}{1 - \varkappa_0 \varkappa_n} - \frac{1 + \varkappa_d k}{1 + \varkappa_d \varkappa_n}\, e^{(k - \varkappa_n) d}\right. \\ & \left. - \frac{a^2}{\pi i} \int_{L_\varkappa + L_{-\varkappa}} \frac{e^{a^2 \varkappa^2 t}\, \varkappa\, d\varkappa}{e^{-2 \varkappa d}\, \varepsilon(\varkappa) - 1} \left(\frac{e^{-\varkappa z}}{1 + \varkappa_0 \varkappa} \int_0^{\infty} \vartheta_0(\tau)\, e^{-\varkappa^2 a^2 \tau}\, d\tau + \frac{e^{-\varkappa(d - z)}}{1 + \varkappa_d \varkappa} \int_0^{\infty} \vartheta_d(\tau)\, e^{-\varkappa^2 a^2 \tau}\, d\tau\right). \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

Für $\varkappa_0 = \varkappa_d = \infty$ (adiabatische Randbedingungen) entfällt der dritte Summand, aber gemäß (45) hat man noch zu addieren

$$\frac{1}{d}\int_0^d \varphi(z)\,dz + \frac{k_1}{k\,d}\,(e^{k\,d}-1)\,t\,,$$

sodaß in diesem Falle gilt

$$\left.\begin{aligned}\vartheta_{ad}(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{a^2\varkappa_n^2 t}\,\frac{E_n(z)}{\sqrt{N(\varkappa_n)}}\,E_n^{\varphi} + \frac{2\,k_1\,k}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E_n(z)\left(e^{a^2\varkappa_n^2 t}-1\right)}{N(\varkappa_n)\,(k^2-\varkappa_n^2)\,\varkappa_n^2}\,(1-e^{(k-\varkappa_n)\,d})\\ + \frac{1}{d}\int_0^d \varphi(z)\,dz + \frac{k_1}{k\,d}\,(e^{k\,d}-1)\,t\,.\end{aligned}\right\} \tag{62}$$

Es muß hier darauf verzichtet werden, die allgemeinen Gleichungen (61), (62) auf wichtige Anwendungen zu spezialisieren. Statt dessen soll etwas ausführlicher ein Beispiel für den oben erwähnten Fall durchgerechnet werden, daß $\vartheta_0(\tau)$, $\vartheta_d(\tau)$ gesuchte Funktionen sind, während $g(z)$ sowie $f(z) = k_1\,e^{k\,z}$ vorgegeben sind und $\varphi(z)$ offen bleibt. Trivialerweise kann dabei der Fall adiabatischer Randbedingungen außer Betracht bleiben.

Die ihn betreffenden allgemeinen Fragestellungen bezüglich $g(z)$ und $\varphi(z)$ erledigen sich mit E_n^f nach (60) gemäß der Endbedingung (39) und der Zusatzbedingung (47) sehr einfach. Ist $\varphi(z)$ gegeben, so ist mit (62) schon alles beantwortet, ist aber g(z) gegeben mit erfüllter Bedingung (46), so findet man aus (39) E_n^{φ} und aus (47) E_0^{φ}, also

$$E_n^{\varphi} = E_n^g\,e^{-a^2\varkappa_n^2 t_g} - \frac{E_n^f}{a^2\varkappa_n^2}\left(1-e^{-a^2\varkappa_n^2 t_g}\right). \tag{63}$$

Das aber ist wegen der Eigenschaften (22), (23) der $\varkappa_n$, die auch für $\varkappa_0 = \varkappa_d = \infty$ erhalten bleiben, nicht für beliebige E_n^g möglich, die auf konvergente Entwicklungen führen, sondern nur für solche, welche entsprechend dieser Gleichung auch auf E_n^{φ} führen, die eine konvergente Entwicklung nach den Eigenfunktionen definieren. Z. B. erweist sich die Endbedingung $g(z) = \text{konst.}$ als unmöglich, welche zwar (46) befriedigt, aber wegen E_n^f nach (60) keine konvergenzerzeugenden E_n^{φ} nach (63) ergibt, es sei denn $E_n^f = 0$.

Es soll nun, nachdem solcherweise der Fall adiabatischer Randbedingungen erledigt ist, die folgende Aufgabe gelöst werden:

Gegeben: $g(z) = \vartheta^0 = \text{konst.}$,

Gesucht: mögliche $\vartheta_0(t)$, $\vartheta_d(t)$, $\varphi(z)$ bei endlichen $\varkappa_0$, $\varkappa_d$. (64)

Bei gegebener Wärmeproduktion $f(z)$ sollen also mögliche Rand- und Anfangstemperaturen bestimmt werden derart, daß zur Zeit $t = t_g$ eine konstante Temperaturverteilung herrscht. Man kann natürlich nicht erwarten, daß gerade bei diesem speziellen Beispiel sich solche gesuchte Temperaturfunktionen ergeben, die eine leichte praktische Realisierung ermöglichen. Das Beispiel ist aber deswegen recht instruktiv, weil es die Lösungsmethode demonstriert und überdies ein Fall ist, in dem $\vartheta_0(t)$, $\vartheta_d(t)$, $\varphi(z)$ eindeutig durch die Endbedingung und die Wärmeproduktion bei festen $\varkappa_0$, $\varkappa_d$ bestimmt sind.

Zur Auswertung von (39) braucht man neben E_n^f nach (60) noch E_n^g. Es ist nach (21)

$$E_n^g = \frac{\vartheta^0}{\sqrt{N(\varkappa_n)}}\int_0^d\left(e^{\varkappa_n z}\,\frac{1+\varkappa_0\varkappa_n}{1-\varkappa_0\varkappa_n} - e^{-\varkappa_n z}\right)dz = \frac{2\,\vartheta^0}{\sqrt{N(\varkappa_n)}\,\varkappa_n\,(1-\varkappa_0\varkappa_n)}\left(e^{\varkappa_n d}\,\frac{1+\varkappa_0\varkappa_n}{1-\varkappa_d\varkappa_n} - 1\right).$$

Dann lautet (39)

$$\left.\begin{aligned}&\frac{2\,\vartheta^0\,e^{-a^2\varkappa_n^2 t_g}}{\sqrt{N(\varkappa_n)}\,\varkappa_n\,(1-\varkappa_0\varkappa_n)}\left(e^{-\varkappa_n d}\,\frac{1-\varkappa_0\varkappa_n}{1+\varkappa_d\varkappa_n} - 1\right)\\ &= E_n^{\varphi} + \frac{2\,k_1\left(e^{-a^2\varkappa_n^2 t_g}-1\right)(\varkappa_0 k-1)}{a^2\sqrt{N(\varkappa_n)}\,\varkappa_n\,(k^2-\varkappa_n^2)\,(1-\varkappa_0\varkappa_n)}\left[1 - \frac{(1-\varkappa_0\varkappa_n)\,(1+\varkappa_d k)}{(1+\varkappa_d\varkappa_n)\,(1-\varkappa_0 k)}\,e^{(k-\varkappa_n)\,d}\right]\\ &+ \frac{2\,a^2\varkappa_n}{\sqrt{N(\varkappa_n)}\,(1-\varkappa_0\varkappa_n)}\left(\int_0^{t_g}\vartheta_0(\tau)\,e^{-a^2\varkappa_n^2\tau}\,d\tau - \frac{e^{-\varkappa_n d}\,(1-\varkappa_0\varkappa_n)}{1+\varkappa_d\varkappa_n}\int_0^{t_g}\vartheta_d(\tau)\,e^{-a^2\varkappa_n^2\tau}\,d\tau\right).\end{aligned}\right\} \tag{65}$$

Um hier die mit wachsendem $\varkappa_n$ unbegrenzt wachsende linke Seite zum Verschwinden zu bringen, setze man

$$\vartheta_0(\tau) = \vartheta^0 + \Theta_0^{(1)}(\tau)\,, \qquad \vartheta_d(\tau) = \vartheta^0 + \Theta_d^{(1)}(\tau)\,. \tag{66}$$

Dann wird aus (65)

$$\left.\begin{aligned} 0 = E_n^{\varphi} &+ \frac{2\,k_1\left(e^{-a^2\varkappa_n^2 t_g} - 1\right)(\varkappa_0 k - 1)\,\varkappa_n}{a^2\sqrt{N(\varkappa_n)}\,\varkappa_n^2(k^2-\varkappa_n^2)(1-\varkappa_0\varkappa_n)}\left[1 - \frac{(1-\varkappa_0\varkappa_n)(1+\varkappa_d k)}{(1+\varkappa_d\varkappa_n)(1-\varkappa_0 k)}\,e^{(k-\varkappa_n)d}\right] \\ &+ \frac{2\,\vartheta^0\left(1 - \dfrac{1-\varkappa_0\varkappa_n}{1+\varkappa_d\varkappa_n}\,e^{-\varkappa_n d}\right)}{\sqrt{N(\varkappa_n)}\,\varkappa_n(1-\varkappa_0\varkappa_n)} \\ &+ \frac{2\,a^2\varkappa_n}{\sqrt{N(\varkappa_n)}\,(1-\varkappa_0\varkappa_n)}\left(\int_0^{t_g}\Theta_0^{(1)}(\tau)\,e^{-a^2\varkappa_n^2\tau}\,d\tau - e^{-\varkappa_n d}\,\frac{1-\varkappa_0\varkappa_n}{1+\varkappa_d\varkappa_n}\int_0^{t_g}\Theta_d^{(1)}(\tau)\,e^{-a^2\varkappa_n^2\tau}\,d\tau\right). \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

Bedenkt man nun, daß im zweiten Summanden

$$\frac{1}{\varkappa_n^2(k^2-\varkappa_n^2)} = \frac{1}{k^2}\left(\frac{1}{k^2-\varkappa_n^2} + \frac{1}{\varkappa_n^2}\right)$$

gesetzt werden kann, so führt die Substitution

$$\left.\begin{aligned} \Theta_0^{(1)}(\tau) &= \frac{k_1(\varkappa_0 k - 1)}{a^2 k^2} - \frac{k_1(\varkappa_0 k - 1)}{a^2 k^2}\,e^{k^2 a^2(\tau - t_g)} + \Theta_0^{(2)}(\tau)\,, \\ \Theta_d^{(1)}(\tau) &= -\frac{k_1(1+\varkappa_d k)}{a^2 k^2}\,e^{k d} + \frac{k_1(1+\varkappa_d k)}{a^2 k^2}\,e^{k d}\cdot e^{k^2 a^2(\tau - t_g)} + \Theta_d^{(2)}(\tau) \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

zu einer weiteren Vereinfachung von (67), bei der der dortige zweite mit wachsendem $\varkappa_n$ unbeschränkt wachsende Summand beseitigt ist. Man erhält

$$\begin{aligned} 0 = E_n^{\varphi} &+ \frac{2\,\vartheta^0\left(1 - \dfrac{1-\varkappa_0\varkappa_n}{1+\varkappa_d\varkappa_n}\,e^{-\varkappa_n d}\right)}{\sqrt{N(\varkappa_n)}\,\varkappa_n(1-\varkappa_0\varkappa_n)} + \frac{2\,\varkappa_n\,k_1(\varkappa_0 k - 1)\,e^{-a^2 k^2 t_g}}{\sqrt{N(\varkappa_n)}\,(1-\varkappa_0\varkappa_n)\,k^2 a^2(k^2-\varkappa_n^2)} \\ &+ \frac{2\,\varkappa_n\,k_1\,e^{(k-\varkappa_n)d}\,(1+\varkappa_d k)\,e^{-k^2 a^2 t_g}}{\sqrt{N(\varkappa_n)}\,(1+\varkappa_d\varkappa_n)\,a^2 k^2(k^2-\varkappa_n^2)} \\ &- \frac{2\,k_1(\varkappa_0 k - 1)\,\varkappa_n}{a^2\sqrt{N(\varkappa_n)}\,k^2(k^2-\varkappa_n^2)(1-\varkappa_0\varkappa_n)}\left[1 - \frac{(1-\varkappa_0\varkappa_n)(1+\varkappa_d k)}{(1+\varkappa_d\varkappa_n)(1-\varkappa_0 k)}\,e^{(k-\varkappa_n)d}\right] \end{aligned}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} E_n^{\varphi} = &- \frac{2\,\vartheta^0\left(1 - \dfrac{1-\varkappa_0\varkappa_n}{1+\varkappa_d\varkappa_n}\,e^{-\varkappa_n d}\right)}{\sqrt{N(\varkappa_n)}\,\varkappa_n(1-\varkappa_0\varkappa_n)} \\ &+ \frac{2\,k_1(\varkappa_0 k - 1)\,\varkappa_n\left(1 - e^{-k^2 a^2 t_g}\right)}{a^2\sqrt{N(\varkappa_n)}\,k^2(1-\varkappa_0\varkappa_n)(k^2-\varkappa_n^2)}\left[1 - \frac{(1-\varkappa_0\varkappa_n)(1+\varkappa_d k)}{(1+\varkappa_d\varkappa_n)(1-\varkappa_0 k)}\,e^{(k-\varkappa_n)d}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

Hier und in der vorhergehenden Gleichung ist bereits das sich aus (67), (68) ergebende Glied

$$\frac{2\,a^2\varkappa_n}{\sqrt{N(\varkappa_n)}\,(1-\varkappa_0\varkappa_n)}\int_0^{t_g}\left[\Theta_0^{(2)}(\tau) - \frac{1-\varkappa_0\varkappa_n}{1+\varkappa_d\varkappa_n}\,e^{-\varkappa_n d}\,\Theta_d^{(2)}(\tau)\right]e^{-a^2\varkappa_n^2\tau}\,d\tau \tag{70}$$

weggelassen. Zur Begründung bedenke man, daß nach (21) gilt

$$e^{\varkappa_n d}\,\frac{1+\varkappa_0\varkappa_n}{1-\varkappa_d\varkappa_n} = e^{-\varkappa_n d}\,\frac{1-\varkappa_0\varkappa_n}{1+\varkappa_d\varkappa_n} = \sqrt{\frac{1-\varkappa_0^2\varkappa_n^2}{1-\varkappa_d^2\varkappa_n^2}}\,,$$

der Integrand in (70) also reell ist und (70) selbst mit wachsendem $\varkappa_n$ über alle Grenzen wächst, während die Glieder in (69) alle beschränkt bleiben. Soll also das Problem lösbar sein, so müssen $\Theta_0^{(2)}(\tau)$ und $\Theta_d^{(2)}(\tau)$ identisch verschwinden.

Man sieht in (69), daß wegen der Eigenschaften der $\varkappa_n$ nach (22), (23) E_n^{ν} auf eine konvergente Entwicklung führt, also ein $\varphi(z)$ definiert, das weiter unten nach der Berechnung von $\vartheta(z, t)$ gemäß (9) sofort erhalten werden kann.

Nach (66) und (68) ergibt sich für die Randtemperaturen

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_0(t) &= \vartheta^0 + \frac{k_1(\varkappa_0 k - 1)}{a^2 k^2}\left[1 - e^{a^2 k^2 (t - t_g)}\right], \\ \vartheta_d(t) &= \vartheta^0 - \frac{k_1(1 + \varkappa_d k)}{a^2 k^2} e^{k d}\left[1 - e^{a^2 k^2 (t - t_g)}\right], \end{aligned}\right| \tag{71}$$

welche also für $t = t_g$ identisch mit ϑ^0 werden.

Geht man mit (71), (69) und $f(z) = k_1 e^{k z}$ in (9) ein, so folgt nach längerer Rechnung, die aber nichts Neues mehr bietet,

$$\vartheta(z, t) = \vartheta^0 - \frac{k_1}{a^2 k^2} e^{k z}\left[1 - e^{a^2 k^2 (t - t_g)}\right]. \tag{72}$$

Man sieht sofort, daß (72) für $t = t_g$ die Endbedingung $\vartheta(z, t_g) = \vartheta^0$ erfüllt und für $t < t_g$ überdies nirgends die Endtemperatur überschritten wird. Die Randbedingungen (6), (7) sind ebenfalls unter Berücksichtigung von (71) unmittelbar abzulesen, während sich für $t = 0$ die Anfangstemperatur zu

$$\vartheta(z, 0) = \varphi(z) = \vartheta^0 - \frac{k_1}{a^2 k^2} e^{k z}\left(1 - e^{-a^2 k^2 t_g}\right) \tag{73}$$

ergibt. Aus ihr erkennt man übrigens, daß nur für $k = 0$, d. h. eine räumlich konstante Wärmeproduktion, eine räumlich konstante Anfangstemperatur möglich ist. Nach (71) sind in diesem Falle die Randtemperaturen $\vartheta_0(t) = \vartheta_d(t) = \vartheta^0 + k_1(t - t_g)$. Es liegt nahe, diese Überlegungen auf allgemeinere Felder und mehr Dimensionen auszudehnen. Doch sollten hier nur an den einfachsten Fällen die charakteristischen Fragestellungen gezeigt werden.

5. Zusammenfassung. Das aus der Anwendung hochfrequenter Wechselströme auf die Erwärmung von Materialien wachsende allgemeine Problem lautet: Durch Kombination elektromagnetischer und thermischer Felder ist zu einer vorgeschriebenen Zeit ein vorgeschriebener Temperaturverlauf herzustellen. Unter der Annahme des *Newton*schen Abkühlungsgesetzes zu beiden Seiten einer unendlich ausgedehnten ebenen Platte der Dicke d wird zunächst bei allgemein gegebener, ebenfalls nur von einer Variablen abhängiger Wärmeproduktion $f(z)$, eine allgemeine Lösung des inhomogenen Wärmeleitungsproblems in solcher Form gegeben, daß daraus die Endtemperaturbedingung abgeleitet werden kann. Als erstes Beispiel wird aus dieser die Wärmeproduktion berechnet, die nötig wäre, um schon zu vorgegebener endlicher Zeit die Platte auf eine vorgeschriebene konstante Temperatur ϑ^0 zu bringen, wenn die Anfangstemperatur Null ist und an den Rändern die konstante Temperatur ϑ^0 herrscht. Die Frage nach dem Aussehen quasistationärer elektromagnetischer Felder in Dielektriken geringen Verlustfaktors, die mit $f(z)$ vereinbar sind, führt auf $f(z) = k_1 e^{k z}$ (k_1, k Konstante), eine auch für andere wichtige Anwendungen gültige Form der Wärmeproduktion. Für dieses $f(z)$ wird der allgemeine Temperaturverlauf angegeben und die Endbedingung für das Problem ausgewertet, Anfangs- und Randtemperaturen so zu bestimmen, daß sich zu einer vorgeschriebenen endlichen Zeit eine konstante Temperatur in der ganzen Platte einstellt. Es zeigt sich, daß bei diesem Beispiel die gesuchten Temperaturverläufe eindeutig bestimmbar sind und nur bei homogenem Feld ($k = 0$) eine konstante Anfangstemperatur möglich ist.

(Eingegangen am 11. Januar 1952.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *Manfred Krüger*, Dachau, Obb., Gröbenzellerstr. 6.

Über Biegewellen in Stäben.

Von H. Schirmer.

1. Aufgabenstellung. Die vorliegende Arbeit[1] befaßt sich mit Biegewellen in Stäben, insbesondere solchen, die durch stoßartige Beanspruchungen ausgelöst werden. Im ersten Teil (Ziffer 2 bis 5) wird der Mechanismus der Biegewellen durch Zerlegung in zwei Elementarwellen anschaulich gemacht. Der zweite Teil knüpft an eine Arbeit von *W. Flügge*[2] an, der den Stab als eindimensionalen Wellenleiter behandelt, der der von *S. Timoshenko*[3] angegebenen Gleichung

$$E\,k^2\,w_{xxxx} - \varrho\,k^2\left(1+\frac{E}{\Lambda G}\right)w_{xxtt} + \frac{\varrho^2\,k^2}{\Lambda G}\,w_{tttt} + \varrho\,w_{tt} = 0 \tag{1}$$

gehorcht. Darin bedeuten E den Elastizitätsmodul, G den Gleitmodul, ϱ die Werkstoffdichte, k den Trägheitsradius des konstanten Balkenquerschnitts, Λ eine dimensionslose, bei der Berechnung der Querkraft aus den Schubspannungen auftretende Konstante, w die transversale Auslenkung des Balkens, x die Längskoordinate, t die Zeit und die Indizes in bekannter Symbolik partielle Ableitungen. Wir schreiben (1) sogleich in die für das Folgende zweckmäßigere Form

$$w_{xxxx} - \left(\frac{1}{c_l^2}+\frac{1}{c_s^2}\right)w_{xxtt} + \frac{1}{c_l^2\,c_s^2}\,w_{tttt} + \frac{\omega_0^2}{c_l^2\,c_s^2}\,w_{tt} = 0 \tag{2}$$

um, die die Ausbreitungsgeschwindigkeiten

$$c_l = \sqrt{\frac{E}{\varrho}}, \qquad c_s = \sqrt{\frac{G\Lambda}{\varrho}}$$

der Longitudinal- und Transversalwellen im Stabe enthält. Die Bedeutung der Frequenz $\omega_0 = c_s/k$ wird noch hervortreten.

Die Gleichungen (1) und (2) berücksichtigen sowohl Querkraftverformung als auch Drehträgheit der Querschnitte. *W. Flügge* hat gezeigt, daß dies unbedingt erforderlich ist, wenn man zu endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeiten kommen will. Die charakteristischen Geschwindigkeiten sind $\pm c_l$, $\pm c_s$; die erste ist die Laufgeschwindigkeit eines Biegemomentensprunges, die zweite die einer Querkraftunstetigkeit. Beide Sprünge breiten sich mit senkrechter Stirn und konstanter Sprunghöhe aus. Diese Ergebnisse gewinnt *W. Flügge* durch eine physikalische Betrachtung des Wellenkopfes; man kann sie aber natürlich auch mit Hilfe der Charakteristikentheorie erhalten (vgl. *F. Pfeiffer*[4]).

Da die Gleichungen (1) und (2) neben dem Hauptteil ein Glied zweiter Ordnung enthalten, ist die Ausbreitung der Biegewellen mit Dispersion verbunden; ein aufgebrachter Stoß verformt sich also längs des Ausbreitungsweges. Diese Verformung wird im zweiten Teil dieser Arbeit ermittelt. Die entsprechende Aufgabe hat *A. Kromm*[5] für die Kreislochscheibe behandelt, deren Lochrand einen Radialspannungsstoß erfährt. Hier bleibt die Sprunghöhe während der Ausbreitung jedoch nicht erhalten, sondern nimmt entsprechend der radialen Ausbreitung mit wachsendem Laufweg ab.

In den genannten Arbeiten ergeben sich die senkrechten Wellenstirnen stets als Folge der Vereinfachungen, die in der eindimensionalen Behandlung der Stäbe und zweidimensionalen Behandlung der Scheibe enthalten und nur solange berechtigt sind, wie die Wellenlänge des Vorganges groß gegen die Querschnittsabmessungen des Stabes bzw. die Dicke der Scheibe ist. Darauf hat *L. Cremer*[6] hingewiesen. Jeder genügend steile Stoß enthält aber Teilwellen beliebig kurzer Wellenlänge. Die senkrechte Wellenstirn ist also nur eine Annäherung; in Wahrheit ist

---

[1] Gekürzte Fassung einer am Lehrstuhl für Mechanik entstandenen und von der Fakultät für Maschinenwesen der Technischen Hochschule Hannover genehmigten Dissertation 1949 (D 89). Referent: Prof. Dr.-Ing. *O. Flachsbart*; Korreferent: Prof. Dr.-Ing. habil. *A. Pflüger*.

[2] *W. Flügge*, Z. angew. Math. Mech. 22 (1942), S. 312.

[3] *S. Timoshenko*, Phil. Mag. (6) 41 (1921), S. 744.

[4] *F. Pfeiffer*, Z. angew. Math. Mech. 25/27 (1947) S. 83.

[5] *A. Kromm*, Z. angew. Math. Mech. 28 (1948) S. 104.

[6] *L. Cremer*, Z. angew. Math. Mech. 23 (1943) S. 291.

der Wellenkopf verschliffen. Für den Fall der Telegraphengleichung hat *H. Pleijel*[1] die Verschleifung der Stirn berechnet, die dadurch entsteht, daß die Stromverteilung über den Drahtquerschnitt frequenzabhängig ist.

2. Zerlegung der Biegewelle in zwei Elementarwellen. Da wir sowohl Querkraftdeformation als auch Drehträgheit der Stabelemente berücksichtigen, hat jeder Querschnitt zwei Freiheitsgrade, transversale Auslenkung w und Drehwinkel ψ (Abb. 1).

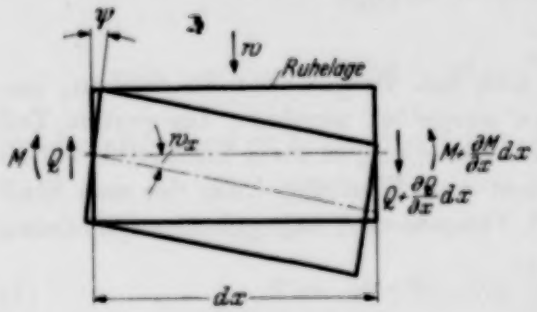

Abb. 1. Balkenelement.

Für Biegemoment M und Querkraft Q gelten bekanntlich[2] die Gleichungen

$$M = -EFk^2\psi_x\,, \qquad Q = GAF(w_x - \psi)\,, \quad (3\,\mathrm{a,b})$$

die das vollständige Elastizitätsgesetz des Stabes darstellen. Hinzu treten die dynamischen Zusammenhänge

$$Q_x = \varrho F w_{tt}\,, \qquad M_x = Q - \varrho F k^2 \psi_{tt} \quad (4\,\mathrm{a,b})$$

für Transversal- und Drehbewegung. Aus den vier Gleichungen (3) und (4) läßt sich die Gleichung (1) oder auch das ihr gleichwertige System

$$\left.\begin{aligned} \psi_{xx} - \frac{1}{c_l^2}(\psi_{tt} + \omega_0^2\psi) &= -\frac{\omega_0^2}{c_l^2} w_x\,, \\ w_{xx} - \frac{1}{c_s^2} w_{tt} &= \psi_x \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

herleiten, das sich anschaulich verstehen läßt. Die linke Seite der ersten Gleichung (5), gleich Null gesetzt, beschreibt die reine Drehwelle des Stabes, die sich ausbilden würde, wenn man die transversale Auslenkung durch eine geeignete Abstützung verhinderte. Das rechts stehende Glied stellt die Kopplung zwischen Dreh- und Querwelle dar. Entsprechendes gilt für die untere Gleichung, deren gleich Null gesetzte linke Seite die reine Transversalwelle beschreibt, die entsteht, wenn man die Drehung aller Stabelemente unterdrückt. Dreh- und Querwelle beeinflussen sich gegenseitig über die Kopplungsglieder der rechten Seiten der Gleichungen (5).

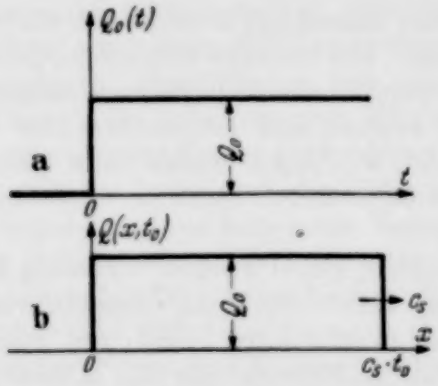

Abb. 2. Stoßerregung einer Querwelle:
a) bei $x = 0$ aufgebrachter Stoß $Q_0(t)$,
b) Querwelle nach Ablauf der Zeit t_0.

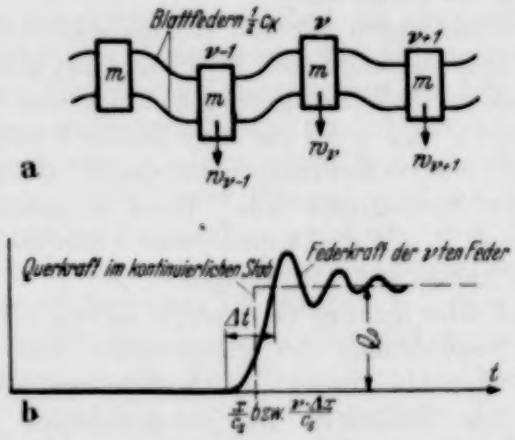

Abb. 3. Schwingerkette als Modell der Querwelle:
a) Aufbau der Kette, b) Einschwingvorgang der Kette bei Stoßerregung des Anfangsgliedes.

Daraus erkennt man, daß in einem Stabe, in dem Biegewellen einer bestimmten Frequenz angeregt werden, zwei verschiedene Teilwellen laufen, den beiden Freiheitsgraden der Querschnitte entsprechend. Diese Teilwellen sind jedoch nicht Quer- und Drehwelle, sondern wegen der Kopplung zwischen ihnen Wellenformen, in denen in jedem Stabelement die vier Größen M, Q, ψ, w gleichzeitig schwingen. Dennoch ist es nützlich, zunächst Quer- und Drehwelle getrennt zu betrachten. Um keine Rücksicht auf Reflexionen nehmen zu müssen, nehmen wir stets einen einseitig unendlich langen Stab an, der im Anfangsquerschnitt $x = 0$ erregt wird.

3. Eigenschaften der Querwelle.
Die reine Querwelle

$$w_{xx} - \frac{1}{c_s^2} w_{tt} = 0$$

[1] *H. Pleijel*, Teknisk Tidskrift (E) 48, (1918) S. 129, vgl. *K. W. Wagner*, Operatorenrechnung, Leipzig 1940, S. 238.) — [2] *W. Flügge*, a. a. O.

gehört wie die Seilwelle zum einfachsten Wellentyp. Phasen- und Gruppengeschwindigkeit fallen zusammen und sind frequenzunabhängig. Ein dem Anfangsquerschnitt $x = 0$ aufgedrückter Querkraftstoß $Q_0(t)$ (Abb. 2a), läuft daher unverformt als Kopfwelle mit senkrechter Stirn den Stab entlang (Abb. 2b).

Die Querwelle läßt sich durch die in Abb. 3a dargestellte ∞ lange Schwingerkette veranschaulichen, die bekanntlich einen Tiefpaß mit der Grenzfrequenz $\omega_0' = 2\sqrt{c_k/m}$ darstellt[1]. Da hohe Frequenzen in der Kette nicht fortgeleitet werden, schwingen die Glieder der Kette im Gegensatz zu den Stabelementen stetig ein[2] (vgl. Abb. 3b), entsprechend der Aussage der Unschärferelation, nach der für jedes Übertragungssystem das Produkt aus Bandbreite und Anstiegsdauer Δt von der Größenordnung 1 ist[3].

Von der Gleichung des νten Schwingers der Kette

$$\ddot{w}_\nu - \frac{c_k}{m}(w_{\nu+1} - 2\,w_\nu + w_{\nu-1}) = 0$$

gelangen wir zu der Gleichung der Querwelle zurück, wenn wir die Federkonstante c_k durch die Elastizität $GA/\Delta x$, die Masse m durch die Trägheit $\varrho\,F\,\Delta x$ des Balkenstückes Δx ersetzen und den Grenzübergang $\Delta x \to 0$ durchführen. Dabei rückt die Grenzfrequenz ω_0' nach ∞: aus dem Tiefpaß wird ein Allpaß.

4. Eigenschaften der Drehwelle.

Die Gleichung

$$\psi_{xx} - \frac{1}{c_1^2}\psi_{tt} - \frac{\omega_0^2}{c_1^2}\psi = 0 \tag{6}$$

der reinen Drehwelle stellt den Sonderfall $\alpha = 0$ der allgemeinen Telegraphengleichung $c^2 u_{xx} - u_{tt} - \alpha u_t - \beta u = 0$ dar, deren Eigenschaften bekannt sind[4]. Neben den zweiten

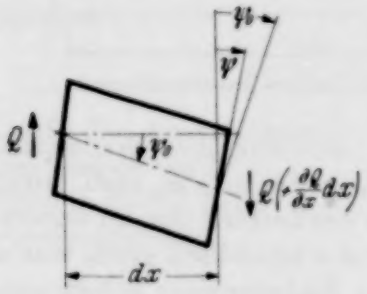

Abb. 4. Zur Drehbewegung der Stabquerschnitte.

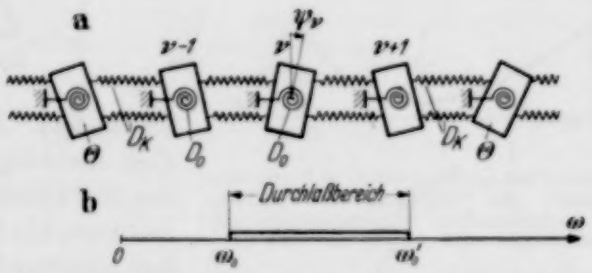

Abb. 5. Drehschwingerkette als Modell der Drehwelle: a) Aufbau der Kette, b) Durchlaßbereich der Kette.

Ableitungen tritt die Funktion ψ selbst auf; daran ist zu erkennen, daß jedes einzelne Stabelement für sich schwingungsfähig ist, und zwar, wie Gleichung (6) zeigt, mit der Resonanzfrequenz $\omega_0 = c_s/k$. Diese Fähigkeit kommt offenbar durch das Zusammenwirken von Querkraftdeformation und Drehträgheit zustande.

Das in Abb. 4 dargestellte Stabelement, in welchem die Stabachse um den Winkel $w_x = \psi_0$ gegen die Ruhelage geneigt sei, erfährt nämlich durch die Querkraft das Drehmoment $Q\,dx = GAF(\psi_0 - \psi)\,dx$ [Gleichung (3b)], das dem Moment $-\varrho\,F\,k^2\,\ddot{\psi}\,dx$ der Massenträgheit das Gleichgewicht hält. Das Momentengleichgewicht liefert die Schwingungsgleichung

$$\ddot{\psi} + \omega_0^2\,\psi = \omega_0^2\,\psi_0$$

mit der Resonanzfrequenz ω_0. Die Querschnitte schwingen dabei um die Ruhelage ψ_0, d. h. um die Stellung senkrecht zur Balkenachse. Benachbarte Querschnitte sind über das Biegemoment miteinander gekoppelt. Die Drehwelle wird also durch das Biegemoment vorwärts getrieben.

Zur Veranschaulichung diene die in Abb. 5a dargestellte unendlich lange Kette, in der Drehschwinger der ungekoppelten Eigenfrequenz $\omega_0 = \sqrt{D_0/\Theta}$ über Federpaare vom Direktionsmoment D_k miteinander verbunden sind. Diese Kette ist ein einfacher Bandpaß, dessen Durch-

---

[1] *R. Grammel*, Ing.-Arch. 14 (1943/44) S. 213.

[2] *J. R. Carson*, Proc. Inst. El. Eng. (1919) S. 407.

[3] *K. Küpfmüller*, Elektr. Nachr. Techn. 1 (1924) S. 141, 5 (1928), S. 18; *K. Fränz*, Arch. elektr. Übertragung 5 (1951) S. 10.

[4] z. B. *G. Doetsch*, Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Berlin 1937, Kapitel 21.

laßbereich durch die Frequenzen

$$\omega_0 = \sqrt{D_0/\Theta}\,, \qquad \omega_0' = \omega_0\sqrt{1 + 4\,D_k/D_0}$$

begrenzt wird[1] (Abb. 5b). Die Bewegung des ν-ten Schwingers wird durch die Gleichung

$$\ddot{\psi}_\nu + \frac{D_0}{\Theta}\psi_\nu - \frac{D_k}{\Theta}(\psi_{\nu+1} - 2\,\psi_\nu + \psi_{\nu-1}) = 0$$

beschrieben. Ersetzen wir, um zum kontinuierlichen Stab zurückzukehren, Θ und D_k durch die entsprechenden Größen $\varrho F k^2 \Delta x$ und $E F k^2/\Delta x$ eines Balkenstückes der Länge Δx sowie $\sqrt{D_0/\Theta}$ durch c_s/k, so erhalten wir nach dem Grenzübergang $\Delta x \to 0$ wieder die Gleichung (6) der reinen Drehwelle. Beim Grenzübergang rückt ω_0' wieder nach ∞; aus dem Bandpaß wird ein Hochpaß.

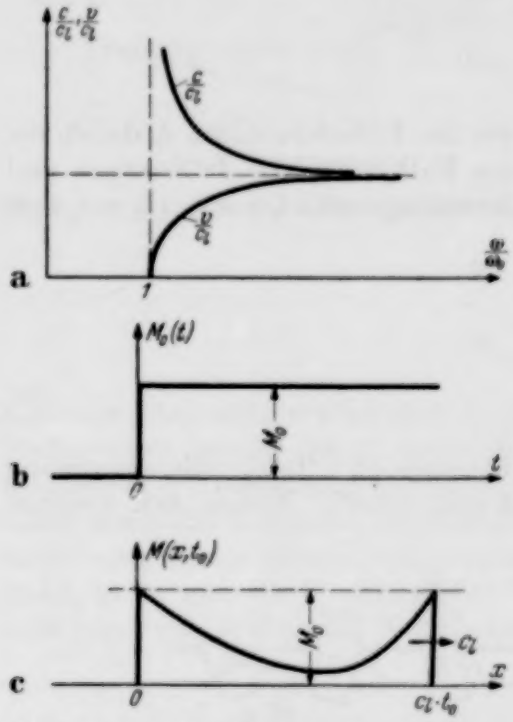

Abb. 6. Eigenschaften der Drehwelle: a) Frequenzgang der Phasen- und Gruppengeschwindigkeit, b) Bei $x = 0$ aufgebrachter Biegemomentenstoß $M_0(t)$, c) Drehwelle nach Ablauf der Zeit t_0.

Mit dem Ansatz einer laufenden Sinuswelle

$$\psi(x, t) = \Psi\, e^{i\,\omega(t - x/c)}$$

erhalten wir die Phasengeschwindigkeit

$$c(\omega) = \frac{c_l}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

sowie die Gruppengeschwindigkeit

$$v(\omega) = \frac{d\omega}{ds} = c_l\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}$$

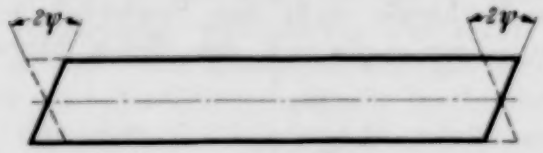

Abb. 7. Drehwelle bei der Resonanzfrequenz ω_0.

(Abb. 6a). Hierbei ist $s = \omega/c$ die Wellenzahl. Beide Geschwindigkeiten sind nur für $\omega > \omega_0$ reell, entsprechend der Hochpaßeigenschaft des Leiters. An der unteren Grenze des Durchlaßbereiches ist c unendlich groß, was unmittelbar anschaulich ist: alle Stabelemente schwingen in ihrer ungekoppelten Resonanzfrequenz mit gleicher Amplitude im Gleichtakt (Abb. 7). Zu diesem Zustand gehört eine unendlich große Phasengeschwindigkeit und zugleich eine verschwindende Gruppengeschwindigkeit, da das Biegemoment überall verschwindet, ein Energietransport also nicht erfolgen kann. Übrigens muß nach einem von *H. G. Baerwald*[2] angegebenen Satz die Gruppengeschwindigkeit an allen Häufungsstellen der Eigenwerte, das sind hier die Grenzen des Durchlaßbereiches, verschwinden. Im Durchlaßbereich nimmt c mit wachsender Frequenz ab und v zu, da die Bewegungen benachbarter Querschnitte zeitlich um so mehr gegeneinander phasenverschoben sind, je höher die Frequenz ist. Im Sperrbereich schließlich kann keine fortlaufende Welle bestehen. Läßt man nämlich den Querschnitt $x = 0$ nach der Gleichung

$$\psi(0, t) = \Psi\, e^{i\,\omega\,t} \qquad (\omega < \omega_0)$$

schwingen, so ist die Bewegung benachbarter Querschnitte durch

$$\psi(x, t) = \psi(o, t)\, e^{-\beta\,x} \qquad \text{mit} \qquad \beta = c_l\sqrt{(\omega_0/\omega)^2 - 1}$$

gegeben; die Querschnitte schwingen phasengleich und mit örtlich abnehmender Amplitude. Da überall $v < c$ ist, ist die Dispersion normal.

Der Frequenzgang der Phasen- und Gruppengeschwindigkeit kommt, wie oben dargestellt, durch kontinuierlich im Ausbreitungsgebiet der Welle verteilte Resonatoren zustande, die auf die Welle zurückwirken. Das gleiche Dispersionsverhalten ist in der Elektrodynamik bei Wellen in Medien mit freien Elektronen bekannt, z. B. bei Rundfunkwellen in der Heavisideschicht[3].

---

[1] *R. Grammel*, a. a. O.
[2] *H. G. Baerwald*, Elektr. Nachr. Technik 8 (1931), S. 224.
[3] *W. O. Schumann*, Elektrische Wellen, München 1948, S. 89 und 91.

Auch die beim Durchgang von Licht durch Materie gemessenen Dispersionskurven lassen sich auf diese Weise erklären[1]; die Abweichungen dieser Kurven von den in Abb. 6a dargestellten erklären sich aus der Absorption des Lichtes sowie daraus, daß das Licht in der Materie nicht eine, sondern eine Vielzahl von Resonanzstellen vorfindet.

Erteilt man dem Stabanfang $x = 0$ den in Abb. 6b dargestellten Biegemomentenstoß, so ist das Biegemoment im Querschnitt x gegeben durch

$$M(x,t)\begin{cases} = 0 \quad \text{für} \quad t < x/c_l\,, \\ = M_0\left[1 - \omega_0 \frac{x}{c_l} \int\limits_{x/c_l}^{t} \frac{J_1(\omega_0 \sqrt{\tau^2 - (x/c_l)^2})}{\sqrt{\tau^2 - (x/c_l)^2}}\, d\tau\right] \quad \text{für} \quad t \geq x/c_l\,. \end{cases} \tag{7}$$

Dieses Ergebnis, in welchem J_1 die Besselfunktion erster Ordnung ist, läßt sich aus der bekannten Lösung des Einschaltproblems der allgemeinen Telegraphenleitung herleiten[2]. In dimensionslosen Koordinaten

$$\xi = \omega_0 \frac{x}{c_l}\,, \qquad \eta = \omega_0\, t$$

nimmt (7) die Form

$$M(\xi,\eta)\begin{cases} = 0 \quad \text{für} \quad \eta < \xi\,, \\ = M_0\left[1 - \xi \int\limits_{\xi}^{\eta} \frac{J_1(\sqrt{\zeta^2 - \xi^2})}{\sqrt{\zeta^2 - \xi^2}}\, d\zeta\right] \quad \text{für} \quad \eta \geq \xi \end{cases} \tag{7a}$$

an. Die laufende Welle (7) ist in Abb. 6c dargestellt. Die Wellenstirn bleibt bei der Ausbreitung erhalten; da die hohen Frequenzen dispersionsfrei übertragen werden, ist dies verständlich. Die Dispersion wirkt sich nur auf den Wellenrücken aus; dieser beginnt im Wellenkopf mit der Anfangstangente

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{M_0}{2}\, x \frac{\omega_0^2}{c_l^2} \qquad \text{oder} \qquad \frac{\partial M}{\partial \xi} = \frac{M_0}{2}\, \xi\,,$$

die im Laufe der Ausbreitung also immer steiler wird.

Die Stoßwelle (7) kann in der Fourierdarstellung

$$M(x,t) = \frac{M_0}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{S(x,\omega)}{\omega}\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

geschrieben werden; die Spektralfunktion ist von der Form

$$S(x,\omega) = \omega\, \mathfrak{L}\,[M(x,t)] = e^{-\omega_0 \frac{x}{c_l}\sqrt{1-(\omega/\omega_0)^2}}\,,$$

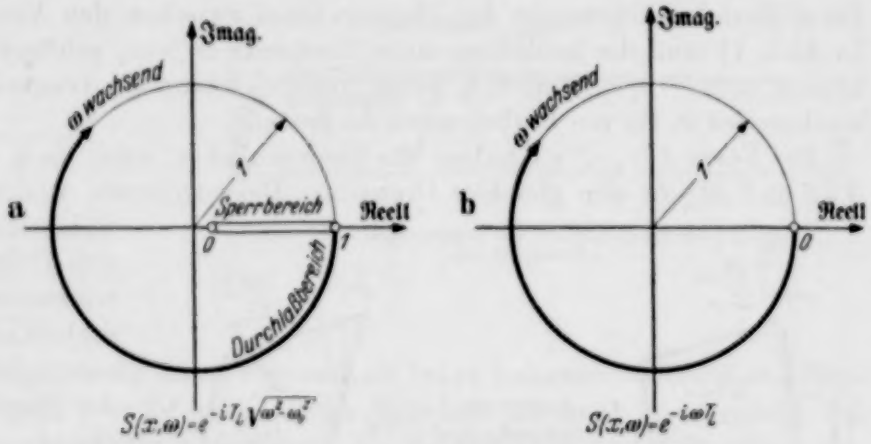

Abb. 8. Spektralfunktionen:
a) der Drehwelle (Laufzeit $T_L = x/c_l$, Parameter ω/ω_0).
b) der Querwelle (Laufzeit $T_L = x/c_s$).

worin das Zeichen $\mathfrak{L}$ die *Laplace*-Transformation kennzeichnet, und in Abb. 8a dargestellt[3]. Sperr- und Durchlaßbereich treten auch in dieser Darstellung deutlich hervor. Zum Vergleich zeigt Abb. 8b die Spektralfunktion der reinen Querwelle.

Wenn wir, wie Abb. 9 andeutet, den Balken auf seiner ganzen Länge elastisch stützen, wobei die Elastizität kontinuierlich verteilt zu denken ist, tritt auch für die Querwelle eine Resonanzfrequenz Ω_0 auf, die der Frequenz ω_0 der Drehwelle entspricht. Dann sind beide Elementarwellen vom gleichen Typus, und Gleichung (2) nimmt die Form

$$w_{xxxx} - \left(\frac{1}{c_l^2} + \frac{1}{c_s^2}\right) w_{xxtt} + \frac{1}{c_l^2 c_s^2}\, w_{tttt} - \frac{\Omega_0^2}{c_s^2}\, w_{xx} + \frac{\omega_0^2 + \Omega_0^2}{c_l^2 c_s^2}\, w_{tt} + \frac{\omega_0^2 \Omega_0^2}{c_l^2 c_s^2}\, w = 0$$

an, die bis auf das Glied mit w_{xx} hinsichtlich Quer- und Drehwelle symmetrisch gebaut ist.

[1] *R. W. Pohl*, Optik, 2. Aufl., Berlin 1941, § 106.
[2] z. B. *G. Doetsch*, a. a. O. S. 374. — [3] *G. Doetsch*, a. a. O. S. 368.

5. Eigenschaften der Biegewelle. Wir gehen nun zur Biegewelle über, wobei wir uns zunächst auf eine reine Sinuswelle

$$w(x, t) = W e^{i[\omega(t - x/c)]} \tag{8}$$

beschränken. Gleichung (2) liefert mit dem Ansatz (8) für die Phasengeschwindigkeit c den Ausdruck

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c_l^2} + \frac{1}{c_s^2}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{c_s^2} - \frac{1}{c_l^2}\right)^2 + \frac{1}{c_l^2 c_s^2}\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2} \tag{9}$$

Die Abhängigkeit der Phasengeschwindigkeit von der Frequenz ist in Abb. 10 dargestellt. Es bestehen zwei Zweige c_1 und c_2; die beiden zu einer Frequenz gehörenden Wellenformen unterscheiden sich also hinsichtlich der Laufgeschwindigkeit und damit der Wellenlänge. Form *2* hat nur für $\omega > \omega_0$ Wellencharakter, da c_2 für $\omega < \omega_0$ imaginär ist.

Zu der Welle (8) gehören nach den Gleichungen (3) und (4) die Größen

$$w_x = -i\frac{\omega}{c} w,$$

$$\psi = -i c \omega\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{c_s^2}\right) w,$$

$$M = E F k^2 \omega^2 \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{c_s^2}\right),$$

$$Q = i G A F \frac{\omega c}{c_s^2} w.$$

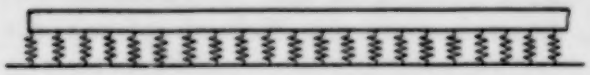

Abb. 9. Elastisch gestützter Balken.

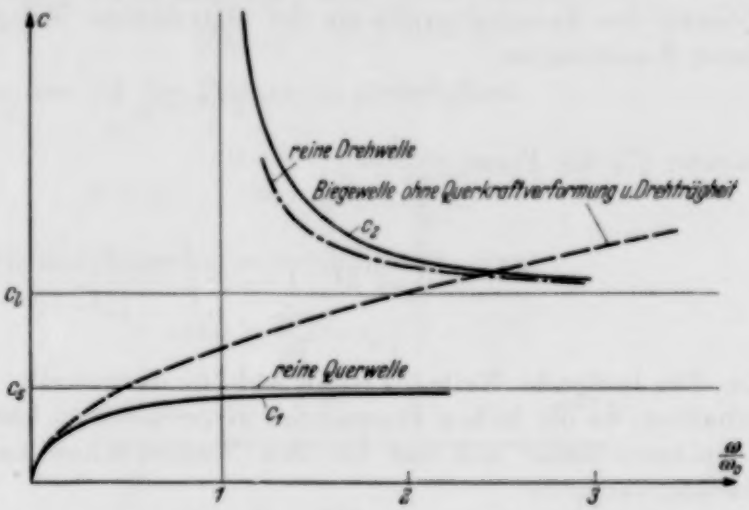

Abb. 10. Frequenzgang der Phasengeschwindigkeit der Biegewelle.

Diese Beziehungen zeigen die Phasenwinkel zwischen den Verschiebungs- und Kraftgrößen auf. In Abb. 11 sind die beiden zu einer Frequenz $\omega > \omega_0$ gehörenden Bewegungsformen im Augenblick τ, $\omega(\tau - x/c) = \pi$, d. h. beim Nulldurchgang der transversalen Auslenkung w in Richtung wachsender w, für ein Stabelement dargestellt.

Bei Form *1* ($c_1 < c_s$) haben die Drehwinkel w_x und, da $\psi < w_x$ ist, auch die Biegemomente $Q\,dx$ und $M_x\,dx$ den gleichen Drehsinn. Bei gegebener Auslenkung sind diese beiden Momente daher einzeln relativ klein, so daß die Welle von relativ geringen Kräften vorwärts getrieben wird, was die geringe Laufgeschwindigkeit erklärt. Die Wellenform liegt zwischen der reinen Querwelle ($\psi = 0$) und der Biegewelle nach der elementaren Gleichung

$$E k^2 w_{xxxx} + \varrho w_{tt} = 0 \quad (\psi = w_x),$$

und zwar für hohe Frequenzen näher bei der ersten, für niedrige Frequenzen näher bei der zweiten (Abb. 10). Für sehr hohe Frequenzen wird die Wellenform mit der reinen Querwelle identisch und kann dementsprechend hier nur eine Querkraft, jedoch kein Biegemoment übertragen.

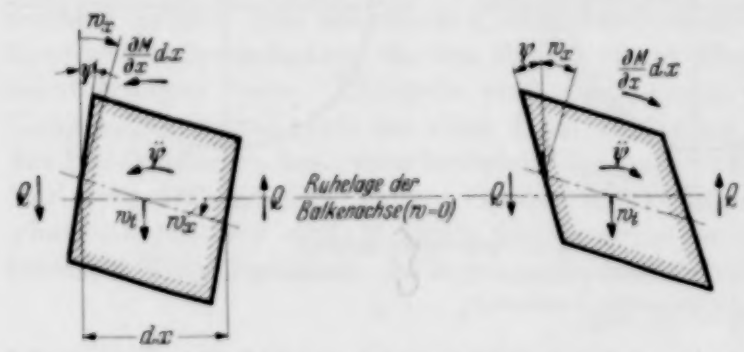

Abb. 11. Die beiden Formen *1* (links) und *2* (rechts) der Biegewelle für $\omega > \omega_0$; der gezeichnete Augenblick entspricht dem Durchgang des Stabes durch die Ruhelage; die eingetragenen Größen haben ihren Scheitelwert erreicht; M, ψ_x, ψ, Q_x w, w_{tt} gehen gerade durch Null.

Für Form *2* ist $c_2 > c_l$, und w_x und ψ sind nun um 180° phasenversetzt. Dies führt zu großen Werten der Querkraft. Noch größer als das Moment $Q\,dx$ ist jedoch das diesem entgegen wirkende Moment $M_x\,dx$. Es sind starke Spannungen vorhanden, die die große Laufgeschwindigkeit c_2 und damit eine große Wellenlänge bewirken. Dementsprechend ist die Neigung w_x der Balkenachse relativ gering. Die Form unterscheidet sich nur geringfügig von der reinen Drehwelle, für die $w_x = 0$ ist (Abb. 10). Für sehr hohe Frequenzen wird dieser Unterschied überhaupt zu Null; die Wellenform vermag dann nur ein Biegemoment, nicht aber eine Querkraft zu übertragen.

Die von *W. Flügge* gefundenen senkrechten Wellenstirnen, die bei der Ausbreitung eines Querkraft- und eines Biegemomentenstoßes auftreten, werden im ersten Fall ausschließlich von der Form *1*, im zweiten nur von der Form *2* vorwärts getragen.

Wir führen nun die Abkürzungen $n = c_l/c_s$, $b = (n^2-1)/(n^2+1)$ und das dimensionslose Frequenzmaß

$$z = \frac{n^2-1}{2n}\frac{\omega}{\omega_0}$$

ein. Für Stäbe mit Rechteckprofil und der *Poisson*schen Zahl $m = 10/3$ ist $n = 2$ und $z = \frac{3}{4}(\omega/\omega_0)$. Die Wellenzahlen werden

$$s_{1,2} = \frac{\omega}{c_{1,2}} = \frac{h_{1,2}(z)}{k}. \tag{10}$$

Die Hilfsfunktion

$$h_{1,2}(z) = \frac{\sqrt{2}\sqrt{n^2+1}}{n^2-1}\sqrt{z^2 \pm b z\sqrt{1+z^2}} \tag{11}$$

ist in Abb. 12 dargestellt. Für die Gruppengeschwindigkeit $v = d\omega/ds$ finden wir

$$v_{1,2}(z) = b\, c_l \frac{h_{1,2}(z)}{g_{1,2}(z)} \tag{12}$$

mit der weiterem Hilfsfunktion $g_{1,2}(z) = z \pm b\dfrac{z^2+1/2}{\sqrt{1+z^2}}$.

Den Frequenzgang der Gruppengeschwindigkeit zeigt Abb. 13. Der Ast v_1 hat für alle Frequenzen die Eigenschaft $v_1 > c_1$, was anomale Dispersion bedeutet. Für die elementare Biegewelle ohne

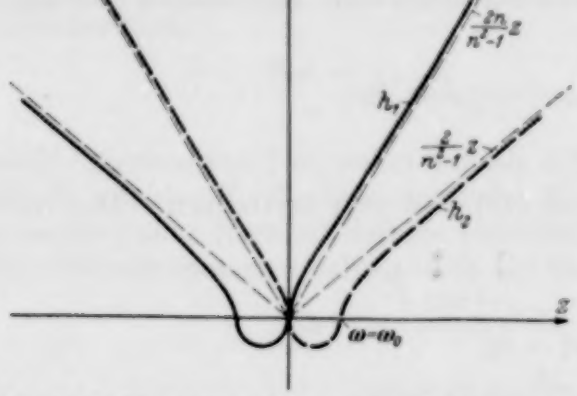

Abb. 12. Die Äste h_1 und h_2 von $h(z)$. Die Werte oberhalb der z-Achse sind positiv reell, die unterhalb derselben negativ imaginär zu verstehen. Die beiden restlichen, zu h_1 und h_2 bezüglich der z-Achse spiegelbildlichen Äste $-h_1$ und $-h_2$ sind nicht gezeichnet.

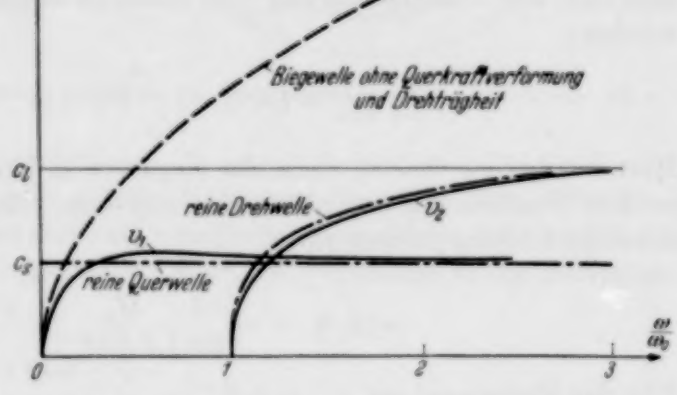

Abb. 13. Frequenzgang der Gruppengeschwindigkeit der Biegewelle.

Querkraftdeformation und Drehträgheit ist diese Eigenschaft lange bekannt; schon *Lord Rayleigh* hat gezeigt, daß für diese Welle $v = 2c$ ist [1]. Dieses Ergebnis ist auch anschaulich: bei gegebener transversaler Auslenkung sind die Krümmung der Balkenachse und damit das treibende Biegemoment um so größer, je kleiner die Wellenlänge ist. Daher ist $dc/d\lambda < 0$ und, was gleichbedeutend ist, $v > c$.

Übrigens ist anomale Dispersion auch bei anderen Wellen, deren vorwärts treibende Kraft einer Krümmung proportional ist, wie z. B. den Kapillarwellen einer Flüssigkeitsoberfläche, bekannt [2]. Anschaulich ist auch, daß der Ast v_1 unterhalb der Gruppengeschwindigkeit der elementaren Biegewelle verläuft, da die Berücksichtigung der Querkraftdeformation eine Verminderung der Balkensteifigkeit bedeutet. Der Ast v_2 zeigt dagegen wie die reine Drehwelle normale Dispersion.

6. Ausbreitung eines Biegemomentenstoßes. Wir behandeln nun die Ausbreitung des in Abb. 6b dargestellten Biegemomentenstoßes

$$M_0(t) = \frac{M_0}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega t}}{\omega}\,d\omega\,, \tag{13}$$

[1] *Lord Rayleigh*, Theorie des Schalles, Anhang zu § 273.
[2] *A. Sommerfeld*, Lehrbuch der theoretischen Physik, Band 2, § 25.

der im Anfangsquerschnitt $x = 0$ des einseitig unendlich langen und bei $x = 0$ gelenkig gestützten Stabes aufgebracht wird, also den gleichen Fall, den *W. Prager* für die Gleichung $E k^2 w_{xxxx} + \varrho w_{tt} = 0$ behandelt hat[1]. Der Stab sei im Stoßaugenblick in Ruhe:

$$w(x, 0) = w_t(x, 0) = 0 \quad \text{für alle } x.$$

Für den Querschnitt $x = 0$ bestehen die Stützbedingung $w(0, t) = 0$ und die Momentenbedingung

$$E F k^2 \varphi_x(0, t) = E F k^2 w_{xx}(0, t) = - M_0(t) \tag{14}$$

Der Ansatz

$$w(x, t) = A\, e^{i(\omega t - s x)}$$

führt wieder auf die Wellenzahlen (10) und auf die Lösung

$$w(x, t) = (A\, e^{i s_1 x} + B\, e^{-i s_1 x} + C\, e^{i s_2 x} + D\, e^{-i s_2 x})\, e^{i \omega t}\,.$$

In dieser wollen wir unter $s_1(\omega)$ eine für alle $\omega > 0$ positiv reelle Größe und unter $s_2(\omega)$ eine für $\omega > \omega_0$ positiv reelle, für $0 < \omega < \omega_0$ negativ imaginäre Größe verstehen (vgl. die beiden Äste von $h(z)$ in Abb. 12). Dann stellt $A\, e^{i(\omega t + s_1 x)}$ eine in Richtung abnehmender x laufende Welle dar, die wegen des Fehlens einer Reflexionsstelle verschwinden muß. Das Gleiche gilt bezüglich $C\, e^{i(\omega t + s_1 x)}$ für $\omega > \omega_0$. Für $0 < \omega < \omega_0$ kann dieses Glied $C\, e^{\beta x}\, e^{i \omega t}$ ($\beta = - i s_2$ positiv reell) geschrieben werden; es bedeutet also eine Schwingung, deren Amplitude mit wachsendem x ansteigt, Diese kann ebenfalls nicht bestehen. Somit ist $A = C = 0$. Aus $w(0, t) = 0$ folgt außerdem $B = - D$. Die verbleibende Teillösung

$$w(x, t) = B\,(e^{-i s_1 x} - e^{-i s_2 x})\, e^{i \omega t}$$

läßt sich der Randbedingung (14) dadurch anpassen, daß unendlich viele Teillösungen überlagert werden:

$$w(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} B(\omega)\,(e^{-i s_1 x} - e^{-i s_2 x})\, e^{i \omega t}\, d\omega\,.$$

Hier werden s_1 und s_2 auch für negative ω benötigt.

Die Funktion $B(\omega)$ läßt sich aus den Gleichungen (13) und (14) bestimmen. Die vollständige Lösung lautet dann

$$w(x, t) = - \frac{1}{2 \pi i} \frac{M_0}{E F k^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i s_1(\omega) x} - e^{-i s_2(\omega) x}}{\omega (s_1^2 - s_2^2)}\, e^{i \omega t}\, d\omega\,.$$

Für das Biegemoment

$$M(x, t) = - E F k^2 \left(w_{xx} - \frac{1}{c_s^2} w_{tt} \right)$$

entsteht der Ausdruck

$$M(x, t) = \frac{M_0}{2 \pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S(x, \omega)}{\omega}\, e^{i \omega t}\, d\omega \tag{15}$$

mit der Spektralfunktion $S(x, \omega)$, die aus zwei den beiden Wellenformen entsprechenden Anteilen S_1 und S_2 besteht:

$$S(x, \omega) = S_1(x, \omega) + S_2(x, \omega)$$

$$= \frac{e^{-i s_1 x}}{2} \left[1 - \frac{\frac{n^2 - 1}{2 n} \frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1 + \left(\frac{n^2 - 1}{2 n}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \right] + \frac{e^{-i s_2 x}}{2} \left[1 + \frac{\frac{n^2 - 1}{2 n} \frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1 + \left(\frac{n^2 - 1}{2 n}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \right] \tag{16}$$

Mit den oben eingeführten Abkürzungen wird einfacher

$$S(x, z) = S_1(x, z) + S_2(x, z) = \frac{e^{-i h_1(z)\, x/k}}{2} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{1 + z^2}} \right) + \frac{e^{-i h_2(z)\, x/k}}{2} \left(1 + \frac{z}{\sqrt{1 + z^2}} \right). \tag{16a}$$

Die Spektralfunktion ist in Abb. 14 für $x/k = 5$ dargestellt. S_1 beginnt auf der reellen Achse im

[1] *W. Prager*, Ing.-Arch. 4 (1933) S. 16.

Punkte (1/2, 0) und durchläuft mit wachsender Frequenz eine Spirale, die mit $\omega \to \infty$ in den Nullpunkt einmündet, was physikalisch bedeutet, daß Wellenform *1* bei hohen Frequenzen kein Biegemoment übertragen kann. S_2 beginnt ebenfalls im Punkte (1/2, 0), bleibt im Sperrbereich $\omega < \omega_0$ jedoch auf der reellen Achse. Bei $\omega = \omega_0$ geht S_2 in eine Spirale über, die sich mit wachsender Frequenz asymptotisch dem Einheitskreis nähert und den Nullpunkt wie $e^{-i\omega T_L}$ ($T_L = x/c_l$) umläuft. Dieses Verhalten ist bekanntlich kennzeichnend für Übertragungssysteme, deren Übergangsfunktion nach Ablauf der Laufzeit T_L mit der Sprunghöhe Eins einsetzt[1]. Wegen $S_1(x, 0) + S_2(x, 0) = 1$ ist ferner nach bekannter Grenzwertrelation[2] $\lim_{t\to\infty} M(x, t) = M_0$ für alle x, wie es sein muß.

Da an der Bildung des Wellenkopfes nur Wellenform *2* beteiligt ist, haben wir dort weitgehende Übereinstimmung zwischen Biegewelle und reiner Drehwelle zu erwarten. In der Tat ist im Wellenkopf für beide Arten $Q = w = w_x = \psi = 0$, $M = M_0$, $\psi_x = -M_0/EFk^2$, $\psi_t = c_l \psi_x$.

Ein Unterschied besteht dagegen bei Q_x; es ist nämlich $Q_x = M_0 \omega_0^2/c_l^2$ für die Drehwelle, $Q_x = M_0 \omega_0^2/(c_l^2 - c_s^2)$ für die Biegewelle, wie sich aus den vier Gleichungen (3) und (4) finden läßt. Die genannten Größen sind im Wellenkopf von x ganz unabhängig. Dagegen wächst die Größe M_x bei der Drehwelle mit x, wie oben im Anschluß an Gleichung (7a) festgestellt. Um auch für die Biegewelle den Wert von M_x im Wellenkopf zu finden, führen wir in Gleichung (15) ein neues Zeitmaß $t_k = t - x/c_l$ ein, so daß im Wellenkopf $t_k = 0$ ist, und entwickeln die damit entstehende Unterfunktion

$$\frac{S(x, \omega)}{\omega} e^{i\omega x/c_l}$$

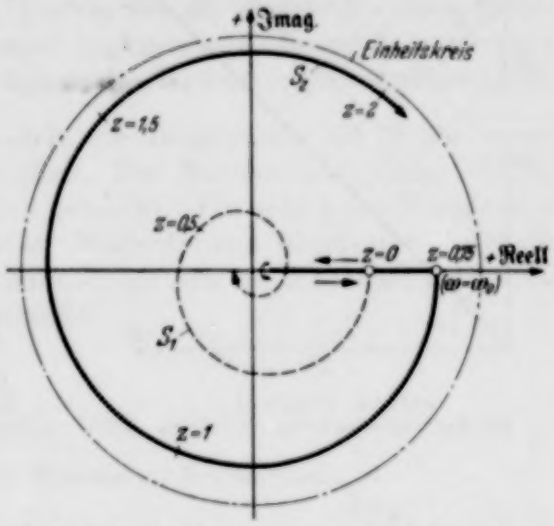

Abb. 14. Spektralfunktionen S_1 und S_2 für $x/k = 5$ und $n = 2$.

nach Potenzen von $1/\omega$, wobei wir alle Glieder von höherer als erster Ordnung in $1/\omega$ fortlassen, da wir nur eine für die Umgebung des Wellenkopfes gültige Näherungslösung suchen. Für diese ist es aber ohne Nachteil, daß die Unterfunktionen sich im Unendlichen singulär verhält und daher ihre Potenzreihenentwicklung nach $1/\omega$ nicht konvergieren kann[3]. Wir erhalten so die Beziehung

$$M(x, t_k) = \frac{M_0}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i \frac{x c_l}{2 k^2 (n^2 - 1)} \frac{1}{\omega}}}{\omega} e^{i\omega t_k} \, d\omega;$$

die Korrespondenz[4] 4,74 (dort $s = i\omega$ setzen) liefert schließlich

$$M(x, t_k) = M_0 J_0\left(\frac{\sqrt{2 x c_l t_k}}{k\sqrt{n^2 - 1}}\right), \tag{17}$$

wobei J_0 die Besselfunktion der Ordnung Null bedeutet. Für den Wellenkopf erhalten wir somit $\lim_{t_k \to 0 \text{ v. o.}} M(x, t_k) = M_0$ und

$$\lim_{t_k \to 0 \text{ v. o.}} \frac{\partial M}{\partial x}(x, t_k) = \frac{\omega_0^2}{c_l^2 - c_s^2} \frac{M_0}{2} x, \tag{18}$$

Die örtliche Abteilung des Biegemomentes im Wellenkopf ist bei der Biegewelle gegenüber der Drehwelle also um denselben Faktor größer wie die örtliche Ableitung der Querkraft. Abbau des Biegemomentes und Aufbau der Querkraft hinter dem Wellenkopf verlaufen somit bei der Biegewelle rascher als bei der Drehwelle. Dies ist auch anschaulich, da ein Stabelement bei der Biegewelle unmittelbar nach Durchzug des Wellenkopfes transversal beschleunigt wird. Bei der Drehwelle ist die Querbewegung dagegen unterdrückt.

---

[1] *W. Oppelt*, Grundgesetze der Regelung, Wolfenbüttel 1947, Tafel 15, S. 49.
[2] *G. Doetsch*, Tabellen zur *Laplace*-Transformation, Berlin 1947, S. 7.
[3] *G. Doetsch*, Tabellen, S. 8.
[4] *G. Doetsch*, Tabellen, S. 111.

7. Charakteristikenverfahren. Die Eigenschaften des Kopfes der sich ausbreitenden Welle sind damit bekannt. Um auch den Wellenrücken zu kennen, muß das Integral (15) ausgewertet werden. Dies stößt nun auf so bedeutende Schwierigkeiten, daß wir uns nach einem Näherungsverfahren umsehen müssen. Hier bietet sich die von *F. Pfeiffer*[1] angegebene Methode dar, ein längs der Charakteristiken fortschreitendes Differenzenverfahren. Da dort der Lösungsgang auch für den vorliegenden Fall skizziert ist, können wir uns kurz fassen.

Wir breiten in der (x, t)-Ebene das in Abb. 15 dargestellte, nach den Charakteristiken der Differentialgleichung (1) orientierte Gitternetz aus und wählen die kleine Maschenweite k. Von den bekannten Punkten der Charakteristik $x = c_l\, t$ bzw. der Ordinatenachse $x = 0$ ausgehend,

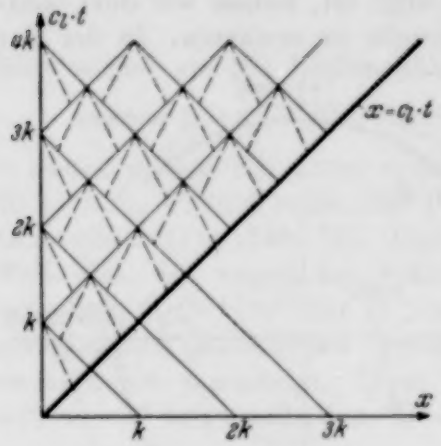

Abb. 15. Gitternetz für das Charakteristikenverfahren.

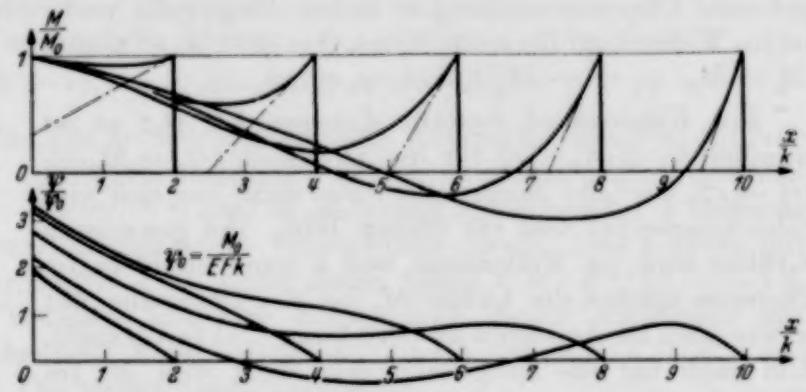

Abb. 17. Biegemoment und Drehwinkel für verschiedene Augenblicke (zweite Näherung). Die strichpunktierten Linien sind die Tangenten im Wellenkopf nach Gleichung (18).

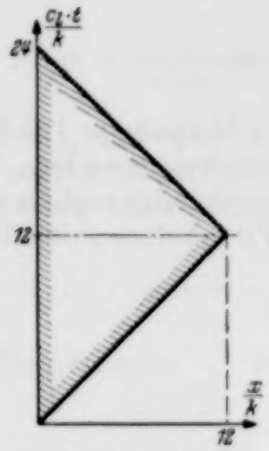

Abb. 16. Das durchgerechnete Gebiet der (x,t)-Ebene.

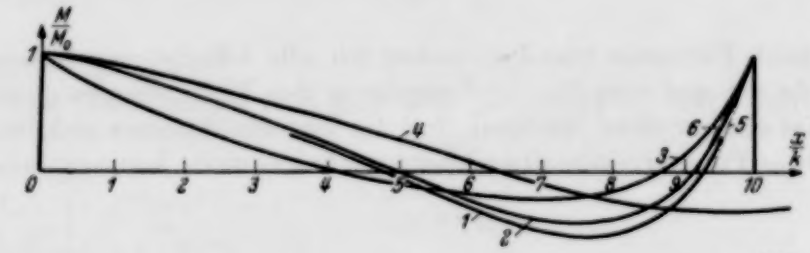

Abb. 18. Vergleich verschiedener Wellenformen für den Augenblick $t = \frac{10\,k}{c_l}$;
1 u. *2*: Biegewelle nach Charakteristikenverfahren erster und zweiter Näherung; *3*: Drehwelle, Lösung nach Gleichung (7); *4*: Biegewelle, Lösung nach Prager; *5*: Wellenkopf-Tangente zu *1* und *2* nach Gleichung (18)
6: Wellenkopf-Tangente zu *3* $\left(M_x = \frac{\omega_0^2}{c_l^2}\frac{M_0}{2}\,x\right)$.

die dem Wellenkopf bzw. dem Stabanfang entsprechen, können wir die Größen $w, w_x, w_t, \psi, \psi_x, \psi_t, M, Q$ in weiteren Punkten ermitteln, indem wir längs der Charakteristiken fortschreiten. Die in Abb. 15 ausgezogenen Linien entsprechen den charakteristischen Geschwindigkeiten $\pm c_l$, die gestrichelten $\pm c_s$. In dieser Weise wurde das in Abb. 16 angedeutete Gebiet durchgerechnet und zur Fehlerkontrolle die Rechnung für das halbe Gebiet (unterhalb der strichpunktierten Linie) mit halber Maschenweite $\frac{1}{2}k$ wiederholt. Eine solche Kontrollrechnung ist um so mehr erforderlich, als die Fehler sich ungünstig fortpflanzen und mit zunehmender Entfernung vom Anfangsquerschnitt $x = 0$ eine wachsende Unsicherheit des Ergebnisses bewirken.

Der Zeitaufwand, den das Verfahren verlangt, ist nicht unerheblich. Unter Benutzung einer halbautomatischen Rechenmaschine benötigen zwei Rechner, die zweckmäßig zusammenarbeiten, für jeden Punkt etwa 5 Minuten zuzüglich etwa der halben Zeit für Kontrollen. Gerechnet wurden etwa 300 Punkte in erster und 500 Punkte in zweiter Näherung. Das Ergebnis ist in Abb. 17 und 18 dargestellt. Abb. 17 zeigt die Größen M und ψ über der Längskoordinate x für verschiedene Zeitpunkte. Im Laufe der Ausbreitung nehmen die Verformung des Rückens der M-Welle und die Tangentenneigung im Wellenkopf zu; letztere verhält sich, soweit die

[1] *F. Pfeiffer*, a. a. O.

beschränkte Genauigkeit des Näherungsverfahrens diesen Schluß zuläßt, wie Gleichung (18) angibt. Die ψ-Kurven sind bis auf einen Faktor das Integral der M-Kurven. Auch diesen Zusammenhang gibt Abb. 17 befriedigend wieder. Die Wendepunkte und Minima der ψ-Kurven liegen an den Stellen, die die Momentenlinien ihnen zuweisen. Dagegen liegen die Maxima etwas zu weit links, entsprechend der starken Krümmung in der Nähe des Wellenkopfes. Die erste Näherungsrechnung gab diesen Zusammenhang nur sehr unvollkommen wieder.

In Abb. 18 sind für den Zeitpunkt $t = 10\,k/c_l$ die Ergebnisse der ersten und zweiten Näherung miteinander verglichen (Kurve *1* u. *2*). Die erste Näherung gibt die Verformung des Wellenrückens also zu ausgeprägt wieder. Die genaue Kurve verläuft danach oberhalb der zweiten Näherungskurve; ihr Abstand von dieser kann zu etwa 1/4 des Abstandes der ersten und zweiten Näherungskurve angegeben werden. Außerdem sind in Abb. 18 zum Vergleich die Biegemomentenkurve für die Drehwelle (Kurve *3*) nach Gleichung (7) sowie für die Biegewelle ohne Querkraftverformung und Drehträgheit nach der von *W. Prager*[1] angegebenen Lösung aufgezeichnet (Kurve *4*). Bei dieser letzten Welle ist die Laufgeschwindigkeit des Wellenkopfes unendlich groß.

8. Zusammenfassung. Die vorliegende Arbeit behandelt die Biegewellen der Stäbe unter Berücksichtigung der Querkraftverformung und Drehträgheit. Der Mechanismus dieser Wellen wird durch Zerlegung in zwei Elementarwellen anschaulich gemacht. Für sehr hohe Frequenzen wird das Biegemoment ausschließlich durch die eine dieser Wellenformen übertragen, weshalb deren Eigenschaften für den Kopf der Welle bestimmend sind, in der sich ein Biegemomentenstoß ausbreitet. Ein solcher Ausbreitungsvorgang wird untersucht.

(Eingegangen am 22. Januar 1952)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. Hans Schirmer, Mannheim, Heckerstraße 11.

[1] *W. Prager*, a. a. O.

Stabilitätsprobleme bei tordierten Stäben und Wellen.

Von A. Trösch.

1. Einleitung. Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Knickung von Stäben (Teil I) und kritischen Drehzahlen von Wellen (Teil II), die durch ein Moment auf Torsion beansprucht sind. Beim Knickproblem werden wir außerdem eine axiale Druckkraft mitberücksichtigen. Wir setzen voraus, daß der Vektor des äußeren Momentes bei der Deformation seine axiale Richtung beibehält (vgl. Abb. 2 und [1] *), und gerade diese Voraussetzung ist für uns wesentlich, indem ein solches Moment im allgemeinen kein Potential besitzt ([2], S. 279). Durch die Annahme einer nichtkonservativen Belastung wird das Vorgehen grundlegend beeinflußt. Von den drei Stabilitätskriterien ([3]) dürfen das statische (als Frage nach den nichttrivialen Gleichgewichtslagen) und das energetische Kriterium (als Frage nach der nicht mehr positiv definiten potentiellen Energie) nicht mehr ohne weiteres verwendet werden; wir müssen auf die ursprüngliche Bedeutung des Stabilitätsbegriffes zurückgreifen und die Schwingungen der Stäbe und Wellen untersuchen. Ein äußeres Moment fester Richtung ist bei der Knickung wohl kaum realisierbar und tritt auch bei den kritischen Drehzahlen nur in seltenen Fällen auf; die Annahme liegt jedoch den meisten bisherigen Arbeiten zugrunde und soll hier beibehalten werden (vgl. [4]).

Die Fragestellung lautet demnach: Bei welchen axialen Belastungen oder bei welchen Drehzahlen entfernen sich die Elemente des Stabes oder der Welle unzulässig weit von der Ruhelage, so daß der Stab oder der Rotor gefährdet ist. Die Zusammengehörigkeit des Knickproblems und der Frage nach den kritischen Drehzahlen ist offensichtlich, wenn wir bei konservativen Belastungen die tiefste Knicklast als die Belastung ansprechen, bei der erstmals eine nichttriviale Gleichgewichtslage möglich ist, während eine kritische Drehzahl dann auftritt, wenn auch bei verschwindender Exzentrizität der Scheibe sich eine stationäre Auslenkung aufrecht erhalten kann ([5], S. 782). Wir werden, wie erwähnt, nicht diesen statischen Standpunkt einnehmen, sondern die Schwingungsrechnungen durchführen; hier geht die Zusammengehörigkeit hervor aus einem Vergleich von (2.2) etwa mit (8.2).

Unsere Aufgabe stellt vor allem ein Elastizitätsproblem dar. Bei der Knickung liegt ein Stab vor, der durch das äußere Moment, die äußere Druckkraft und außerdem durch die Trägheitskräfte seiner eigenen Elemente belastet ist. Bei den kritischen Drehzahlen dagegen — wir vernachlässigen die Wellenmasse — besteht die Belastung in äußerem Moment und Druckkraft und außerdem in den Trägheitskräften der rotierenden Scheibe. Wenn wir die Scheibenebene als senkrecht zur Ruhelage der Welle voraussetzen, so sehen wir damit von der Kreiselwirkung ab (Teil II, A); wählen wir sie senkrecht zur ausgelenkten Welle, so wird die Kreiselwirkung mitberücksichtigt (Teil II, B). Die Knickaufgabe stellt ein Eigenwertproblem dar, während die kritischen Drehzahlen auf ein Anfangswertproblem führen.

Wir beschränken uns übrigens durchwegs auf Stäbe und Wellen mit einer einzigen Biegesteifigkeit, so daß wir mit Vorteil in einem raumfesten Bezugsystem rechnen.

Im Teil I untersuchen wir die Knickung von geraden Stäben in vier verschiedenen Lagerungen (Abb. 1), für die wir aus der Schwingungsdifferentialgleichung die Eigenwertgleichungen aufstellen (Abschnitte 2 und 3). In den Fällen *II* und *III* verhalten sich die Stäbe schon bei beliebig kleinem Moment instabil ([2], S. 288); dies äußert sich darin, daß die Stabelemente sich auf Spiralen aus der Ruhelage entfernen. Wir nehmen dabei das Moment als klein an, was sich dadurch rechtfertigen läßt, daß sich die wesentliche Aussage auf kleine Momente bezieht. Eine Druckkraft berücksichtigen wir vorläufig (Abschnitt 4) nicht. Im Fall *I* besitzt das Moment ein Potential, und wir erwarten das Knickmoment, das sich aus der statischen Rechnung ergibt. Überhaupt lassen sich die Ergebnisse des statischen Kriteriums in den Rahmen unserer

---

* Die eckig eingeklammerten Zahlen, wenn nötig mit hinzugefügter Seitenzahl, beziehen sich auf das folgende Schrifttum:

[1] *A. G. Greenhill*, Proc. Inst. Mechan. Engr. (1883) S. 182;
[2] *H. Ziegler*, Z. angew. Math. Phys. 2 (1951) S. 265;
[3] *H. Ziegler*, Z. angew. Math. Mech. 31 (1951) S. 265;
[4] *H. Ziegler*, Z. angew. Math. Phys. 3 (1952) S. 96;
[5] *C. B. Biezeno* u. *R. Grammel*, Technische Dynamik. Berlin 1939.

Schwingungsrechnungen einfügen. In dem Sonderfall, der der statischen Behandlung entspricht, brauchen wir uns übrigens nicht mehr auf kleine Momente zu beschränken. Wir erhalten für den Fall *IV* als Ergebnis das *Greenhill*sche Knickmoment, wobei hier τ die Belastung ist nicht konservativ — gezeigt werden muß, daß es sich um das kleinste kritische Moment handelt.

Da eine Druckkraft ein Potential besitzt, wird im folgenden Abschnitt 5 nur an einem Beispiel das bekannte Ergebnis der statischen Methode bestätigt.

Für die Belastung mit Druck und Torsion gleichzeitig (Abschnitt 6) ließen sich die Rechnungen mit kleinem Torsionsmoment in ähnlicher Weise durchführen wie für Torsion allein; wir werden jedoch auf die Wiedergabe verzichten und nur die Ergebnisse erwähnen. Einzig für den Fall *I* berechnen wir die kritische Belastung, wobei reine Torsions- und reine Druckbelastung im Resultat mitenthalten sind. In der Art einer *Greenhill*schen Knickformel ([2], S. 276) läßt sich das Ergebnis nur als Näherungsformel darstellen.

Es können verschiedene Gründe dafür geltend gemacht werden, daß das auffällige Verhalten der beiden instabilen Fälle bis jetzt nicht beobachtet worden ist ([4], S. 98). Im Abschnitt 7 wenden wir uns einer Erscheinung zu, die dabei eine Rolle spielen kann, indem wir eine der Geschwindigkeit proportionale Dämpfungskraft einführen. Bei fester Dämpfungszahl läßt sich dann für das Moment eine Grenze angeben, unterhalb welcher sich die Stäbe *II* und *III* stabil verhalten. Wie sich dieses Grenzmoment bei einer zusätzlichen Druckbelastung verändert, ist lediglich mit einem Zahlenbeispiel dargelegt.

Im Teil II, in dem kritische Drehzahlen untersucht werden, sehen wir vorerst von der Kreiselwirkung ab (Teil II, A). Wir führen in bekannter Weise ([5], S. 796) das Problem der kritischen Drehzahlen zurück auf die Frage, welche Auslenkung eine Welle unter einer zu ihr senkrechten Kraft erfährt (Abschnitt 8). Es ergibt sich, daß nur in zwei symmetrischen Fällen (Abb. 5a und d) die einzige bekannte kritische Drehzahl auftritt ([5], S. 800), während in den übrigen untersuchten Fällen jede Drehzahl kritisch wird; dies rührt daher, daß die Auslenkung nicht in die Kraftrichtung fällt und die Drehzahl überhaupt nicht in die Lösung eingeht. Es ist deshalb auch nicht verwunderlich, wenn eine Dämpfung — wir wählen sie wiederum der Geschwindigkeit proportional — die Welle stabil machen kann, aber auch dies unabhängig von der Drehzahl (Abschnitt 10).

Man kann sich fragen, ob das instabile Verhalten nicht durch die Kreiselwirkung doch noch wesentlich beeinflußt wird. Diese Aufgabe, der die folgenden Abschnitte (Teil II, B) gewidmet sind, führt auf zwei simultane inhomogene Differentialgleichungen; sie entstehen aus dem Schwerpunktsatz und dem Drallsatz (in der Gestalt der *Euler*schen Gleichungen) für die Scheibe und dem Zusammenhang zwischen Auslenkung und Belastung der Welle (Abschnitte 11 und 12). Für die fliegende und die beidseitig gelenkig gelagerte Welle (Abb. 4) werden die allgemeinen Ergebnisse weiter verfolgt und dabei festgestellt, daß die Kreiselwirkung zwar die Welle nicht stabilisieren kann, aber immerhin die Amplitude der Schwingungen für Scheiben mit größerem Trägheitsradius weniger rasch anwächst (Abb. 8, Gl. (16.3)). Wenn wir das Torsionsmoment vernachlässigen, so kommen wir zu den bekannten kritischen Drehzahlen mit Kreiselwirkung zurück ([5], S. 803), wobei sich allerdings nur der Gleichlauf als kritisch erweist, jedoch nicht der Gegenlauf.

Weiter untersuchen wir die Wirkung einer — wiederum der Geschwindigkeit proportionalen — Dämpfung; dies führt hier jedoch nicht zum gewünschten Erfolg, indem auch eine große Dämpfungszahl die Welle nicht stabilisieren kann (Abschnitte 14, 15, 17).

Die als zweites Beispiel untersuchte gelenkig gelagerte Welle zeigt grundsätzlich das gleiche Verhalten wie die fliegende Welle: die ohne Torsionsmoment auftretende kritische Drehzahl ist nicht mehr eigentlich kritisch, sondern nur noch gefährlich; dagegen wird überhaupt jede Drehzahl kritisch. Die Kreiselwirkung verlangsamt das (exponentielle) Anwachsen der Schwingungen.

I. Die Knickung von Stäben.

2. Die Schwingungsdifferentialgleichungen. Mit dem kinetischen Stabilitätskriterium, d. h. durch die Betrachtung der Schwingungen um die Gleichgewichtslage, sollen hier die Stäbe bei Belastung durch ein Torsionsmoment W und eine Druckkraft D in folgender Lagerung untersucht werden:

Fall *I* , der beidseitig eingespannte Stab,
Fall *II* , der einseitig eingespannte Stab,
Fall *III*, der auf einer Seite gelenkig gelagerte, auf der andern Seite eingespannte Stab,
Fall *IV*, der beidseitig gelenkig gelagerte Stab.

Während der Fall *I* ein konservatives System darstellt, handelt es sich bei den drei übrigen Fällen um nichtkonservative Systeme.

Die Stäbe werden homogen vorausgesetzt mit der Masse μ je Längeneinheit; ferner besitzen sie auf der ganzen Länge und unabhängig von der Achsenrichtung im Querschnitt dieselbe Biegesteifigkeit $\alpha = EJ$ und dieselbe Torsionssteifigkeit GJ_p.

Die Dyname in einem beliebigen Schnitt z besitzt die folgenden Komponenten ([2], S. 281):

$$\left.\begin{aligned} M_x &= -\alpha\frac{d^2y}{dz^2} + W\frac{dx}{dz}, & M_y &= +\alpha\frac{d^2x}{dz^2} + W\frac{dy}{dz}, \\ K_x &= -\alpha\frac{d^3x}{dz^3} - W\frac{d^2y}{dz^2} - D\frac{dx}{dz}, & K_y &= -\alpha\frac{d^3y}{dz^3} + W\frac{d^2x}{dz^2} - D\frac{dy}{dz}, \end{aligned}\right| \qquad (2.1)$$

und die Schwingungsdifferentialgleichungen lauten

$$\alpha\frac{\partial^4x}{\partial z^4} + W\frac{\partial^3y}{\partial z^3} + D\frac{\partial^2x}{\partial z^2} + \mu\frac{\partial^2x}{\partial t^2} = 0, \qquad \alpha\frac{\partial^4y}{\partial z^4} - W\frac{\partial^3x}{\partial z^3} + D\frac{\partial^2y}{\partial z^2} + \mu\frac{\partial^2y}{\partial t^2} = 0;$$

sie lassen sich mit $r = x + iy$ vereinfachen zu

$$\alpha r^{IV} - iWr''' + Dr'' + \mu\ddot{r} = 0. \qquad (2.2)$$

Die Randbedingungen sind nach (2.1)

$$r = 0, \qquad r' = 0,$$
$$\alpha r'' - iWr' = 0, \qquad \alpha r''' - iWr'' + Dr' = 0,$$

Abb. 1. Die Lagerung in den vier Knickfällen.

Abb. 2. Die Belastung des Stabes.

je nachdem am betreffenden Ende die Ausbiegung der elastischen Linie, ihre Neigung, die Momente M_x, M_y oder die Querkräfte K_x, K_y verschwinden.

Mit dem Ansatz

$$r(z, t) = R(z)\,T(t)$$

und dem Separationsparameter $\alpha\varkappa^4$ erhalten wir die beiden Differentialgleichungen

$$\alpha R^{IV} - iWR''' + DR'' - \alpha\varkappa^4 R = 0$$

und

$$\mu\ddot{T} + \alpha\varkappa^4 T = 0,$$

die mit den Abkürzungen $\frac{W}{\alpha} = w$, $\frac{\alpha\varkappa^4}{\mu} = \lambda^2$ und $\frac{D}{\alpha} = b$ in

$$R^{IV} - iwR''' + bR'' - \varkappa^4 R = 0 \qquad (2.3)$$

und

$$\ddot{T} + \lambda^2 T = 0 \qquad (2.4)$$

übergehen, während wir als Randbedingungen

$$R = 0, \qquad R' = 0,$$
$$R'' - iwR' = 0, \qquad R''' - iwR'' + bR' = 0$$

erhalten. Aus (2.4) folgt als Lösung für den Zeitanteil

$$T(t) = A\exp(i\lambda t) + B\exp(-i\lambda t).$$

Wir ersehen daraus, daß die Schwingung beschränkt bleibt, wenn λ reell, aber verschieden von Null ist. Ausgedrückt in den $\varkappa^4$ heißt das: die Schwingung ist genau dann beschränkt, wenn $\varkappa^4$

auf der positiven reellen Achse liegt oder wenn, in Formeln,

$$Im\,\varkappa^4 = 0 \quad \text{und} \quad Re\,\varkappa^4 > 0 \tag{2.5}$$

gilt. Die beiden Beziehungen stellen zusammen also die Stabilitätsbedingungen dar.

Der Ansatz

$$R(z) = A \exp(\sigma z)$$

liefert uns als charakteristische Gleichung der Differentialgleichung (2.3)

$$\sigma^4 - i\,w\,\sigma^3 + b\,\sigma^2 - \varkappa^4 = 0\,. \tag{2.6}$$

Die vier Wurzeln sind abhängig von $\varkappa^4$ und der Belastung. Mit den Randbedingungen an den Stabenden erhält man eine Eigenwertgleichung, die, wenn man sich die σ aus der Gleichung (2.6) berechnet denkt, eine Beziehung nur noch zwischen der Belastung und $\varkappa^4$ darstellt. Für die Untersuchung der Stabilität benötigen wir also diese Eigenwertgleichungen; sie sollen im nächsten Abschnitt aufgestellt werden.

3. Die Eigenwertgleichungen. Bei der Aufstellung der Eigenwertgleichungen der vier Knickfälle schließen wir von vornherein Doppelwurzeln aus — die Untersuchung der Mehrfachwurzeln hat außer bei den unten besonders besprochenen Fällen auf kein erwähnenswertes Ergebnis geführt —, so daß sich der Ortsanteil der Schwingung darstellen läßt als

$$R(z) = \sum_{k=1}^{4} A_k \exp(\sigma_k z)\,.$$

Für die Formulierung der Randbedingungen benötigen wir die Ausdrücke

$$R'(z) = \sum A_k\,\sigma_k \exp(\sigma_k z), \qquad R''(z) - i\,w\,R'(z) = \sum A_k(\sigma_k^2 - i\,w\,\sigma_k) \exp(\sigma_k z)$$

und

$$R'''(z) - i\,w\,R''(z) + b\,R(z) = \sum A_k(\sigma_k^3 - i\,w\,\sigma_k^2 + b\,\sigma_k) \exp(\sigma_k z)\,,$$

wobei es unter Umständen zweckmäßiger ist, die beiden letzten Gleichungen mit Hilfe von (2.6) zu schreiben als

$$R''(z) - i\,w\,R'(z) = \varkappa^4 \sum A_k \cdot \frac{1}{\sigma_k^2} \exp(\sigma_k z) - b \sum A_k \exp(\sigma_k z)\,,$$

$$R'''(z) - i\,w\,R''(z) + b\,R'(z) = \varkappa^4 \sum A_k \cdot \frac{1}{\sigma} \exp(\sigma_k z)\,.$$

Im Fall *I* lauten die Randbedingungen

$$\sum A_k = 0\,, \quad \sum A_k \sigma_k = 0\,, \quad \sum A_k \exp(\sigma_k l) = 0\,, \quad \sum A_k\,\sigma_k \exp(\sigma_k l) = 0\,.$$

Damit nichttriviale Lösungen A_k vorhanden sind, muß die Determinante des Gleichungssystems, die die Eigenwertgleichung darstellt, verschwinden:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_4 \\ \exp(\sigma_1 l) & \exp(\sigma_2 l) & \exp(\sigma_3 l) & \exp(\sigma_4 l) \\ \sigma_1 \exp(\sigma_1 l) & \sigma_2 \exp(\sigma_2 l) & \sigma_3 \exp(\sigma_3 l) & \sigma_4 \exp(\sigma_4 l) \end{vmatrix} = 0\,.$$

Sie ergibt ausgerechnet

$$\begin{aligned} &+ (\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_4 - \sigma_3)\,\{\exp[(\sigma_1 + \sigma_2) l] + \exp[(\sigma_3 + \sigma_4) l]\} \\ &- (\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_4 - \sigma_2)\,\{\exp[(\sigma_1 + \sigma_3) l] + \exp[(\sigma_2 + \sigma_4) l]\} \\ &+ (\sigma_4 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)\,\{\exp[(\sigma_1 + \sigma_4) l] + \exp[(\sigma_2 + \sigma_3) l]\} = 0 \end{aligned}$$

oder

$$\frac{\mathfrak{Sin}(\sigma_3 - \sigma_1)\,l/2}{(\sigma_3 - \sigma_1)} \frac{\mathfrak{Sin}(\sigma_4 - \sigma_2)\,l/2}{(\sigma_4 - \sigma_2)} = \frac{\mathfrak{Sin}(\sigma_2 - \sigma_1)\,l/2}{(\sigma_2 - \sigma_1)} \frac{\mathfrak{Sin}(\sigma_4 - \sigma_3)\,l/2}{(\sigma_4 - \sigma_3)}\,.$$

Für den Knickfall *II* lauten die Randbedingungen

$$\sum A_k = 0\,, \qquad \sum A_k(\sigma_k^2 - i\,w\,\sigma_k) \exp(\sigma_k l) = 0\,,$$

$$\sum A_k\,\sigma_k = 0\,, \qquad \varkappa^4 \sum A_k \frac{1}{\sigma_k} \exp(\sigma_k l) = 0$$

und die Eigenwertgleichung

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 & \dots \\ \sigma_1^2 & \dots \\ \sigma_1^2(\sigma_1 - i\,w)\exp(\sigma_1 l) & \dots \\ \exp(\sigma_1 l) & \dots \end{vmatrix} = 0\,.$$

Ihre Ausrechnung — z. B. mit dem *Laplace*schen Entwicklungssatz — lohnt sich in der allgemeinen Form nicht.

Im Fall *III* ist

$$\sum A_k = 0\,, \quad \sum A_k \sigma_k = 0\,, \quad \sum A_k \exp(\sigma_k l) = 0\,, \quad \sum A_k \frac{1}{\sigma_k^2} \exp(\sigma_k l) = 0$$

und

$$\begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \dots \\ \sigma_1^3 & \dots \\ \exp(\sigma_1 l) & \dots \\ \sigma_1^2 \exp(\sigma_1 l) & \dots \end{vmatrix} = 0\,.$$

Im Fall *IV* lauten die Randbedingungen

$$\sum A_k = 0\,, \quad \sum A_k \frac{1}{\sigma_k^2} = 0\,, \quad \sum A_k \exp(\sigma_k l) = 0\,, \quad \sum A_k \frac{1}{\sigma_k^2} \exp(\sigma_k l) = 0\,.$$

Als Eigenwertgleichung erhält man

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots \\ \sigma_1^2 & \dots \\ \exp(\sigma_1 l) & \dots \\ \sigma_1^2 \exp(\sigma_1 l) & \dots \end{vmatrix} = 0$$

und daraus

$$\left.\begin{aligned} &+(\sigma_2^2-\sigma_1^2)(\sigma_4^2-\sigma_3^2)\{\exp[(\sigma_3+\sigma_4)l]+\exp[(\sigma_1+\sigma_2)l]\} \\ &-(\sigma_3^2-\sigma_1^2)(\sigma_4^2-\sigma_2^2)\{\exp[(\sigma_2+\sigma_4)l]+\exp[(\sigma_1+\sigma_3)l]\} \\ &+(\sigma_4^2-\sigma_1^2)(\sigma_3^2-\sigma_2^2)\{\exp[(\sigma_2+\sigma_3)l]+\exp[(\sigma_1+\sigma_4)l]\}=0 \end{aligned}\right| \qquad (3.1)$$

oder

$$\frac{\mathfrak{Sin}(\sigma_3-\sigma_1)\,l/2}{(\sigma_3^2-\sigma_1^2)}\,\frac{\mathfrak{Sin}(\sigma_4-\sigma_2)\,l/2}{(\sigma_4^2-\sigma_2^2)} = \frac{\mathfrak{Sin}(\sigma_2-\sigma_1)\,l/2}{(\sigma_2^2-\sigma_1^2)}\,\frac{\mathfrak{Sin}(\sigma_4-\sigma_3)\,l/2}{(\sigma_4^2-\sigma_3^2)}\,.$$

4. Knickung durch Torsion allein. Wenn auf den Stab einzig ein Torsionsmoment wirkt, so vereinfacht sich (2.6) zu

$$\sigma^4 - i\,w\,\sigma^3 - \varkappa^4 = 0\,.$$

Dabei besitzt w gegenüber $\varkappa$ einen kleinen Wert ([2], S. 283), so daß wir für die Wurzeln der charakteristischen Gleichung eine Entwicklung nach w ansetzen können, und zwar, wie man sich leicht überzeugt, als

$$\sigma = \bar{\sigma} + \frac{i\,w}{4} + \cdots,$$

wo $\bar{\sigma}$ der w-freien Gleichung $\bar{\sigma}^4 - \varkappa^4 = 0$ genügt.

Für den Ortsanteil der Schwingung ergibt sich dann, immer unter Vernachlässigung höherer Glieder in w,

$$R(z) = \sum_{k=1}^{4} A_k \exp(\sigma_k z) = \exp\left(\frac{i\,w\,z}{4}\right) \sum_{k=1}^{4} A_k \exp(\bar{\sigma}_k z)\,,$$

und je nach der Lagerung muß $R(z)$ die entsprechenden vier Randbedingungen erfüllen.

Der Knickfall *I* darf als konservatives System mit dem statischen Stabilitätskriterium behandelt werden; er kommt erst in Abschnitt **6** zur Sprache.

Für den Knickfall *II* erhält man die Eigenwertgleichung ([2], S. 285)

$$1 + \cos \varkappa l \, \mathfrak{Cof} \, \varkappa l - \frac{i w}{2 \varkappa} (\cos \varkappa l \, \mathfrak{Sin} \, \varkappa l + \sin \varkappa l \, \mathfrak{Cof} \, \varkappa l) = 0 . \tag{4.1}$$

Ihr kleinster Eigenwert beträgt, ebenfalls nach w entwickelt,

$$\varkappa l = 1{,}875 - 0{,}144 \, i \, w \, l . \tag{4.2}$$

Wir schließen daraus, daß jedes noch so kleine Torsionsmoment mit fester Richtung eine kritische Last darstellt.

Beim Knickfall *III* erhalten wir als Eigenwertgleichung in derselben Näherung

$$\sin \varkappa l \, \mathfrak{Cof} \, \varkappa l - \cos \varkappa l \, \mathfrak{Sin} \, \varkappa l - \frac{i w}{2 \varkappa} (1 - \cos \varkappa l \, \mathfrak{Cof} \, \varkappa l) = 0 , \tag{4.3}$$

die als tiefsten Eigenwert

$$\varkappa l = 3{,}927 - 0{,}067 \, i \, w \, l$$

besitzt. Es erweist sich also auch der einseitig eingespannte und auf der andern Seite gelenkig gelagerte Stab als labil unter einem beliebig kleinen Torsionsmoment.

Beim Knickfall *IV* lautet die Eigenwertgleichung

$$8 \varkappa^2 \sin \varkappa l \, \mathfrak{Sin} \, \varkappa l + w^2 \left[1 - \cos \varkappa l \, \mathfrak{Cof} \, \varkappa l + \frac{3}{4} \varkappa l (\cos \varkappa l \, \mathfrak{Sin} \, \varkappa l - \sin \varkappa l \, \mathfrak{Cof} \, \varkappa l) \right] = 0$$

mit dem tiefsten Eigenwert

$$\varkappa l = \pi (1 - 0{,}006 \, w^2 l^2) .$$

Der erste nichtverschwindende Term ist hier quadratisch in $w \, l$. Der Stab schwingt also stabil, wird aber durch das Moment weicher und schwingt mit einer tieferen Frequenz.

Um uns ein Bild von der Art der Instabilität der Fälle *II* und *III* machen zu können, sei die Schwingung noch etwas näher untersucht. Die Lösung der Differentialgleichung lautet für eine Eigenschwingung

$$r(z, t) = [A \exp(i \lambda t) + B \exp(- i \lambda t)] \sum_{k=1}^{4} A_k \exp(\sigma_k z) .$$

Demnach wird der Stab während der Bewegung ähnlich verformt. Zerlegen wir λ in Real- und Imaginärteil, $\lambda = \lambda_1 + i \lambda_2$, so läßt sich die Bewegung eines festen Punktes, z. B. des Endpunktes in Fall *II*, der Mitte in Fall *III*, beschreiben durch

$$r(l, t) = A_l \exp[(i \lambda_1 - \lambda_2) t] + B_l \exp[- (i \lambda_1 - \lambda_2) t] .$$

A_l und B_l sind durch Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit bestimmt. Die Bahn des Punktes, die für verschwindendes λ_2 eine Ellipse darstellen würde, wird für kleine λ_2 zu einer elliptischen Spirale. Die Ellipse wird dabei immer runder und geht, sobald $\exp(- |\lambda_2| \, t)$ genügend abgeklungen ist, mit

$$r(l, t) \sim \exp[(\operatorname{sgn} \lambda_2) (\lambda_2 - i \lambda_1) t]$$

in eine Kreisspirale über. Wir fragen nun, auf welchen Wert die Amplitude angewachsen ist, wenn der Punkt in der Zeit τ einen vollen Kreis durchlaufen hat. Es ist dann $\lambda_1 \tau = 2 \pi$ und also $\lambda_2 \tau = 2 \pi \lambda_2 / \lambda_1$.

Damit erhalten wir im Knickfall *II*

$$\lambda_2 \tau = 2 \pi \left(\frac{2 \cdot 0{,}144}{1{,}875} \right) w \, l \approx \varphi_0 ,$$

wo φ_0 den totalen Winkel der Verdrehung bedeute, die der Stab unter dem Torsionsmoment W erfährt. Das Amplitudenverhältnis nach einem vollen Umlauf wird damit

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} \approx \exp \varphi_0 \approx 1 + \varphi_0 ,$$

d. h. die Amplitude wächst bei zulässigen Torsionsmomenten recht langsam an.

Im Knickfall *III* wird

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} \approx 1 + \frac{\varphi_0}{5} ;$$

das Anwachsen erfolgt noch langsamer. Vergleicht man jedoch das Anwachsen der Amplitude in gleichen Zeiten, so zeigt sich, daß es für Fall *II* und *III* ziemlich genau gleich rasch vor sich geht.

Knicklasten, die sich aus dem statischen Kriterium für die Fälle *I* und *IV* berechnen lassen, erweisen sich bei unserem Problem ebenfalls als kritisch, wenn wir die Stabschwingungen untersuchen. Denn die statische Behandlung stellt nichts anderes dar als die Vernachlässigung der Trägheitskräfte, was wir durch $\mu = 0$ und damit auch $\varkappa = 0$ beschreiben können; dieser Wert von $\varkappa$ führt auf eine linear mit der Zeit anwachsende „Schwingung".

Im Fall *IV* erhält man mit der Methode des letzten Abschnitts für $\varkappa = 0$ leicht die Beziehung $w\,l = 2\,\pi\,n$ (n ganze Zahl), was nichts anderes als die *Greenhill*sche Knickformel für $D = 0$ darstellt ([2], S. 276). Es erhebt sich nun jedoch die Frage, ob dieses Knickmoment für $n = 1$ auch das kleinste Knickmoment ist. Durch eine nähere Untersuchung von $\varkappa^4$ in Abhängigkeit von $w\,l$ läßt sich tatsächlich zeigen, daß für $0 \leq w\,l < 2\,\pi$ die Größe $\varkappa^4$ niemals außerhalb der positiven reellen Achse liegen kann.

Das statische Kriterium liefert bei diesem nichtkonservativen System den richtigen Wert für das Knickmoment. Da dieses Ergebnis keine unerwartete Aussage darstellt und der Beweis der Behauptung ziemlich weitläufig ist, soll er hier nicht wiedergegeben werden.

5. Knickung durch eine Druckkraft. Eine Druckkraft mit fester Richtung im Raum besitzt ein Potential, so daß das statische Kriterium hier zulässig ist. Die Ergebnisse der Schwingungsrechnung sollen für den Fall *IV* nur als Beispiel angeführt werden.

Bei einer Druckbelastung schreibt sich (2.6) als

$$\sigma^4 + b\,\sigma^2 - \varkappa^4 = 0\,,$$

und ihre vier Wurzeln sind

$$\sigma_{1,3} = -\sigma_{2,4} = \sqrt{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} + \varkappa^4}}\,.$$

Für den Fall *IV* erhalten wir aus (3.1) leicht

$$\mathfrak{Sin}\,\sigma_1 l \cdot \mathfrak{Sin}\,\sigma_3 l = 0$$

mit den Lösungen

$$\sigma_1 l = i\,n\,\pi \text{ oder } \sigma_3 l = i\,n\,\pi \qquad (n \text{ ganze Zahl}).$$

Sie führen beide auf dieselbe Bedingung

$$\varkappa^4 = -\,b\,\frac{\pi^2\,n^2}{l^2} + \frac{\pi^4\,n^4}{l^4}\,,$$

und der Stab wird nach (2.5) labil, wenn

$$b > \frac{\pi^2\,n^2}{l^2}$$

ist. Als Grenze erhalten wir somit die *Euler*sche Knicklast

$$\frac{D}{EJ} = \frac{\pi^2}{l^2}\,.$$

6. Knickung durch Druck und Torsion. Wenn wir zur Torsion die Druckbelastung mitberücksichtigen, so sind wir wiederum gezwungen, uns auf kleine Torsionsmomente zu beschränken ($|w/\varkappa| \ll 1$). Die Eigenwertgleichungen lassen sich dann immer noch in der Art von (4.1) oder (4.3) schreiben; die Schlüsse, die man daraus zieht, seien hier aber nur angedeutet. Die Fälle *II* und *III*, die schon beim Fehlen einer Druckkraft labil sind, bleiben labil, wenn wir die Stäbe zusätzlich mit einer Druckkraft belasten und sogar auch dann, wenn diese Kraft eine beliebig große Zugkraft darstellt. Hier müssen wir also, um die Wirkung der Druckkraft zu erfassen, offenbar die Frage im Zusammenhang mit der Dämpfung aufwerfen, was im nächsten Abschnitt geschehen soll.

Beim Fall *IV* erhebt sich einzig die Frage, ob man ihn wie einen Knickfall mit konservativer Belastung behandeln darf. Da dies für den nichtkonservativen Teil der Belastung (das Moment W) der Fall ist, dürfen wir wohl erwarten, daß die Druckkraft, die ein Potential besitzt, daran nichts ändert. Ein Beweis müßte in ähnlicher Weise geführt werden, wie wir es für das Torsionsmoment allein angedeutet haben.

Obschon wir für $\varkappa^4 = 0$ die Ergebnisse des statischen Stabilitätskriteriums erwarten müssen, wollen wir hier die Ergebnisse der Schwingungsrechnung für die Fälle *I* und *IV* wiedergeben, und zwar deshalb, weil wir im Fall *I* zu einer Knickformel gelangen, die von derjenigen *Greenhills* abweicht ([1]; [4], S. 97). *Nicolai* gibt das richtige Ergebnis an, berechnet jedoch für Druckkräfte keinen Punkt mit zusammengesetzter Belastung (Torsion und Druck gleichzeitig) der kritischen Grenzkurve (vgl. [5], S. 547). Diese kleine Lücke wollen wir noch schließen.

Die Wurzeln der Gleichung (2.6) sind jetzt

$$\sigma_{1,2} = \frac{i}{2}\left(w^2 \pm \sqrt{w^2 + 4\,b}\right), \qquad \sigma_3 = \sigma_4 = 0\,.$$

Für die Formulierung der Randbedingungen benötigen wir außer

$$R(z) = A_1 \exp(\sigma_1 z) + A_2 \exp(\sigma_2 z) + A_3 + A_4 z$$

und seinen Ableitungen den Ausdruck

$$R'' - i\,w\,R' = -\left[A_1 \sigma_1 \sigma_2 \exp(\sigma_1 z) + A_2 \sigma_1 \sigma_2 \exp(\sigma_2 z) + A_4(\sigma_1 + \sigma_2)\right].$$

Im Fall *IV* erhalten wir als Säkulargleichung einfach

$$\exp(\sigma_1 l) = \exp(\sigma_2 l)$$

mit den Lösungen

$$\sigma_1 l = \sigma_2 l + 2\,i\,n\,\pi \qquad (n \text{ ganze Zahl}),$$

was unmittelbar auf die *Greenhill*sche Knickformel

$$\frac{W^2}{4\,\alpha^2} + \frac{D}{\alpha} = \frac{\pi^2}{l^2}$$

führt.

Für den Knickfall *I* schreiben wir als Eigenwertgleichung

$$\begin{vmatrix} \exp(-\sigma_1 l/2) & \exp(-\sigma_2 l/2) & 1 & 0 \\ \sigma_1 l \exp(-\sigma_1 l/2) & \sigma_2 l \exp(-\sigma_2 l/2) & 0 & 1 \\ \exp(\sigma_1 l/2) & \exp(\sigma_2 l/2) & 1 & 1 \\ \sigma_1 l \exp(\sigma_1 l/2) & \sigma_2 l \exp(\sigma_2 l/2) & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0\,,$$

aus der wir nach einigen Umformungen die Gleichung

$$\frac{\mathfrak{Sin}(\sigma_1 - \sigma_2)\,l/2}{(\sigma_1 - \sigma_2)\,l/2} = \frac{\mathfrak{Sin}\,\sigma_1 l/2}{\sigma_1 l/2}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\sigma_2 l/2}{\sigma_2 l/2}$$

oder

$$\frac{\sin\left(\sqrt{w^2 + 4\,b}\right) l/2}{\left(\sqrt{w^2 + 4\,b}\right) l/2} = \frac{\sin\left(w + \sqrt{w^2 + 4\,b}\right) l/4}{\left(w + \sqrt{w^2 + 4\,b}\right) l/4}\,\frac{\sin\left(w - \sqrt{w^2 + 4\,b}\right) l/4}{\left(w - \sqrt{w^2 + 4\,b}\right) l/4}$$

erhalten. Im Grenzfall für verschwindendes Moment ergibt sich daraus

$$\frac{\sin \sqrt{b}\,l}{\sqrt{b}\cdot l} = \left(\frac{\sin \sqrt{b}\,l/2}{\sqrt{b}\cdot l/2}\right)^2$$

mit der *Euler*schen Knicklast

$$\frac{D}{\alpha} = \frac{4\,\pi^2}{l^2}$$

als tiefster Knicklast. Für verschwindende Druckkraft wird die Eigenwertgleichung zu

$$\operatorname{tg}(w\,l/2) = w\,l/2$$

mit der tiefsten Wurzel

$$\frac{W\,l}{2\,\alpha} = 4{,}4934\,.$$

Statt einen Grenzübergang für kleine b zu vollziehen, gehen wir hier besser direkt von der nunmehr gültigen Lösung

$$R(z) = A_1 \exp(i\,w\,z) + A_2 + A_3\,z + A_4\,z^2$$

aus.

Der die beiden Punkte $w = 0$ und $b = 0$ verbindende Kurvenzweig wird am einfachsten aus einer Wertetabelle $\sin x/x$ erhalten. Daraus läßt sich weiter in einem Koordinatensystem mit den Achsen Dl^2/α und $W^2l^2/4\,\alpha^2$ die kritische Grenzkurve zeichnen ([5], S. 547). Dagegen läßt sich der Zusammenhang nicht in einfacher Form als Knickformel hinschreiben. Allenfalls könnte man die Knickformel

$$\frac{3}{2}\left(\frac{|W|\,l}{\alpha}\right)^{3/2} + \frac{Dl^2}{\alpha} = 4\,\pi^2$$

benützen, die für $D > 0$ auf wenige Prozent genau ist.

7. Die Dämpfung. Der Hauptgrund, weshalb das instabile Verhalten der Knickfälle *II* und *III* unter Torsion nicht beobachtet worden ist, dürfte darin liegen, daß die Annahme eines Momentes mit fester Richtung dem wirklichen Kraftangriff nur in seltenen Fällen entspricht und man auf die das Moment erzeugenden Kräfte zurückgehen muß, um den in Wirklichkeit meist vorliegenden Verhältnissen gerecht zu werden ([4]). Da wir hier jedoch die Voraussetzung eines Momentes mit fester Richtung beibehalten wollen, sei als stabilisierende Erscheinung die Wirkung einer Dämpfung untersucht. Für die Dämpfungskräfte wählen wir den einfachsten Ansatz, nämlich eine der Geschwindigkeit proportionale Dämpfungskraft in jedem Stabelelement.

War ohne Dämpfungskraft die Belastung des Stabes je Längeneinheit durch die Trägheitskraft

$$p_x = -\mu\,\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \qquad p_y = -\mu\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

gegeben (Abschnitt 2), so wird jetzt mit der Dämpfung

$$p_x = -\mu\,\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \mu\,\gamma\,\frac{\partial x}{\partial t}, \qquad p_y = -\mu\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \mu\,\gamma\,\frac{\partial y}{\partial t};$$

γ hat dabei die Bedeutung einer Dämpfungszahl. Die Gleichung (2.2) lautet damit

$$\alpha\,r^{\mathrm{IV}} - i\,W\,r''' + D\,r'' + \mu\,\ddot{r} + \mu\,\gamma\,\dot{r} = 0$$

und separiert sich wiederum in

$$\alpha\,R^{\mathrm{IV}} - i\,W\,R''' + D\,R'' - \alpha\,\varkappa^4\,R = 0$$

und

$$\mu\,\ddot{T} + \mu\,\gamma\,\dot{T} + \alpha\,\varkappa^4 T = 0$$

oder

$$\ddot{T} + \gamma\,\dot{T} + \lambda^2 T = 0\,.$$

Die Lösung der zeitabhängigen Gleichung, die uns im Augenblick vor allem interessiert, lautet

$$T(t) = A_1 \exp\left[\left(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\,\lambda^2}\right) t/2\right] + A_2 \exp\left[\left(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\,\lambda^2}\right) t/2\right];$$

dabei ist γ reell und, weil wirklich eine Dämpfung vorhanden sein soll, $\gamma > 0$. In diesem Fall ist die Schwingung stabil, wenn die beiden Ungleichungen

$$Re\left(-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\,\lambda^2}\right) \leq 0$$

erfüllt sind.

$$Re\left(-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\,\lambda^2}\right) = 0$$

stellt offenbar die Grenze des stabilen Gebietes dar. Sie läßt sich auch schreiben als

$$(Im\,\lambda^2)^2 = \gamma^2\,Re\,\lambda^2\,,$$

und die Schwingung ist genau dann stabil, wenn

$$(Im\,\lambda^2)^2 \gtrless \gamma^2\,Re\,\lambda^2$$

ist. Wir sehen daraus z. B., daß für $Re\,\lambda^2 < 0$ die Schwingung immer aufgeschaukelt wird.

In den beiden unter kleinem Moment labilen Knickfällen besitzt das λ einen gegenüber dem Realteil λ_1 kleinen Imaginärteil $i\,\lambda_2$. Für $\lambda = \lambda_1 + i\,\lambda_2$, wobei $\lambda_2^2 \ll \lambda_1^2$ ist, vereinfacht sich die Stabilitätsbedingung zu

$$4\,\lambda_2^2 \gtrless \gamma^2\,.$$

Bei schwacher Aufschaukelung ist die Schwingung genau dann stabil, wenn

$$2\,|Im\,\lambda| \gtrless \gamma \quad (\gamma > 0).$$

Im Knickfall *II* gilt, falls keine Druckkraft vorhanden ist, nach (4.2)

$$\varkappa l = 1{,}875 - 0{,}144\, i\, w\, l\,,$$

und damit wird

$$\lambda = \frac{1}{l^2}\sqrt{\frac{\alpha}{\mu}}\,(3{,}52 - 0{,}54\, i\, w\, l)\,.$$

Nach W aufgelöst lautet dann die Stabilitätsbedingung

$$W_{stabil} < W_0 = 1{,}9\, l\sqrt{\alpha\,\mu}\,\gamma/2\,.$$

Diese Stabilitätsbedingung mit demselben Faktor (innerhalb der angegebenen Genauigkeit) erhalten wir auch für den Knickfall *III*. Bei gegebener Dämpfungszahl schwingt also der Stab bei Momenten, die kleiner als W_0 sind, stabil, bei größeren labil.

Obschon wir über die Größe der Dämpfungskraft keine Angaben machen können, schließen wir aus der Betrachtung der Schwingungen in Abschnitt 4, daß offenbar auch bei größtem zulässigem Moment eine recht geringe Dämpfung schon stabilisiert.

Berücksichtigt man nun noch den Einfluß der Druckkraft, so läßt sich bei fester Dämpfungszahl das Grenzmoment W_0 für jede Druck- oder Zugkraft berechnen. So erhöht sich z. B. im Fall *II* das W_0 auf annähernd den doppelten Wert, wenn wir eine Zugkraft vom Betrage der Knicklast ($4\,D l^2 = \alpha\pi^2$) wirken lassen. Drücken wir andrerseits den Stab mit einem Viertel der kritischen Last ($16\,D l^2 = \alpha\,\pi^2$), so sinkt W_0 um einen Sechstel.

Mit diesen zwei Zahlenbeispielen schließen wir die Untersuchungen der Knickung von geraden Stäben unter Druck und Torsion ab.

II. Kritische Drehzahlen.

A. Kritische Drehzahlen ohne Berücksichtigung der Kreiselwirkung.

8. Der Zusammenhang der kritischen Drehzahlen mit der statischen Durchbiegung der Welle. Wir untersuchen zuerst die kritischen Drehzahlen einer kreiszylindrischen Welle, die eine dünne Scheibe trägt. Die Scheibenmasse m sei so groß, daß die Masse der Welle vernachlässigt werden darf. Es ist bekannt, daß für kleine Auslenkungen r_s des Schwerpunktes S und für eine im Vergleich zum Trägheitsradius kleine Exzentrizität der stationäre Drehzustand ($\dot\varphi = \omega =$ konstant) und stationärer Betrieb (d. h. resultierendes antreibendes Moment $M = 0$) nahezu zusammenfallen ([5], S. 777; [2]. S. 287). Diese Aussage wird durch den Drallsatz geliefert, und wir brauchen hier, wo wir die Bewegung des Schwerpunktes ohne Rücksicht auf die Kreiselwirkung untersuchen wollen, nur noch den Schwerpunktsatz anzuschreiben. Die einzige Kraft, die auf die Welle wirkt, rührt her von der Auslenkung r_d der Welle aus ihrer Ruhelage O und ist der Auslenkung proportional. Wir fassen nun die Größen in der Scheibenebene als komplex auf, so daß wir zwischen der Kraft und der Auslenkung die Beziehung

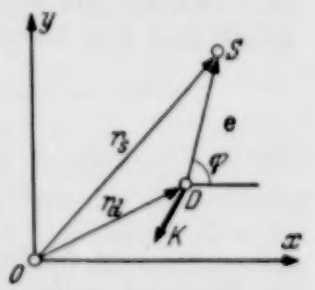

Abb. 3. Kräfte und Bezeichnungen an der Scheibe.

$$K = -\,m\,a\,r_d$$

anschreiben können. Die Masse m haben wir willkürlich aus dem Proportionalitätsfaktor herausgezogen. Der Schwerpunktsatz lautet dann

$$\ddot r_s + a\,r_s = a\,e\exp(i\,\omega\,t)\,, \tag{8.1}$$

wobei wir benützt haben, daß wegen $\varphi = \omega t$ die Beziehung

$$r_d = r_s - e\exp(i\,\omega\,t)$$

gilt. Als Lösung der Differentialgleichung erhalten wir

$$r_s = A_1\exp\left(i\sqrt{a}\,t\right) + A_2\exp\left(-i\sqrt{a}\,t\right) + \frac{a\,e}{a-\omega^2}\exp(i\,\omega\,t)\,.$$

Es treten nun zwei Fälle auf, die sich grundsätzlich unterscheiden:

1. Wenn die Größe a reell ist, so daß also die Auslenkung und die Kraft in dieselbe Richtung fallen — dies wird der normale Fall sein —, so stellen die beiden ersten Glieder der Lösung

harmonische Schwingungen dar, während die partikuläre Lösung bei der kritischen Drehzahl $\omega_k = \sqrt{a}$ ein r_s ergibt, das linear mit der Zeit über alle Grenzen wächst.

2. Ist dagegen a komplex, was z. B. vorkommen kann, wenn die Welle auf Torsion beansprucht ist, so bewirkt eines der beiden ersten Glieder exponentielles Anwachsen von r_s für jede Drehzahl und zwar derart, daß die Geschwindigkeit jederzeit senkrecht auf der Winkelhalbierenden zwischen Auslenkung und Kraft steht. Es muß somit jede Drehzahl als kritisch angesprochen werden; dagegen bleibt jetzt die erzwungene Schwingung beschränkt. Ihre Amplitude kann, wie man sich leicht überzeugt, immer noch beträchtliche Werte erreichen; für eine fliegende Welle von 4 m Länge ist z. B. $A_{max} \gtrsim 200\, e$ (vgl. [2], S. 288).

Wenn wir nun das Verhalten von Wellen, die auf Torsion beansprucht sind, bei verschiedener Lagerung untersuchen, so handelt es sich nach dem, was wir oben ausgeführt haben, lediglich darum, den Zusammenhang zwischen einer Belastung und der Auslenkung des Wellendurchstoßpunktes D zu ermitteln. Damit wir bei Berücksichtigung der Kreiselwirkung diese Fragen nicht nochmals aufnehmen müssen, seien sie gleich hier mit der nötigen Allgemeinheit untersucht.

Wir belasten die Welle am Durchstoßpunkt D durch eine Kraft K und ein Moment M, deren Vektoren in der zur Welle senkrechten (x, y)-Ebene liegen. Außerdem sei die Welle durch ein Moment W auf Torsion beansprucht. Für die Auslenkung erhalten wir dann zwei Differentialgleichungen vierter Ordnung, die bei bekannten Randbedingungen sofort zweimal integriert werden können. Die Berechnung der Auslenkung kann wegen des Einflusses von W bei gewissen Randbedingungen recht mühsam sein, bietet aber nichts Interessantes, so daß wir uns damit begnügen, die Gleichungen und die Lösungen für zwei Fälle als Beispiele anzuführen.

Im Falle einer einseitig eingespannten Welle, die die Belastung am freien Ende trägt, lauten die Gleichungen ([2], S. 281)

$$\alpha x'' + W y' - K_x (l - z) - M_y = 0\,,$$
$$\alpha y'' - W x' - K_y (l - z) + M_x = 0\,.$$

Dieses System läßt sich mit der komplexen Schreibweise in die einzige Gleichung

$$\alpha r'' - i W r' - K (l - z) + i M = 0 \tag{8.2}$$

zusammenfassen. Wir erhalten mit den Randbedingungen daraus für kleine Torsionsmomente W die Auslenkung des Endpunktes $r(l)$ und die Projektion des Tangenten-Einheitsvektors auf die (x, y)-Ebene, die wir mit v bezeichnen wollen, beide in Abhängigkeit von K und M. Für die Kraft und das Moment ergibt sich dann

$$\left.\begin{aligned} K &= \frac{\alpha}{l^3}\,[12\, r - (6 - i\, w\, l)\, v\, l]\,, \\ i\, M &= \frac{\alpha}{l^2}\left[(6 + i\, w\, l)\, r - \left(4 - \frac{i\, w\, l}{2}\right) v\, l\right], \end{aligned}\right| \tag{8.3}$$

sofern wir nur die linearen Glieder in w mitnehmen. Die Größe w steht dabei als Abkürzung für W/α und stellt ungefähr den Drehwinkel dar, um den die Welle durch W je Längeneinheit verdreht wird. Für $M = 0$ kommen wir auf das schon bekannte Ergebnis

$$K = \frac{3\,\alpha}{l^3}\left(1 - \frac{3}{8}\, i\, w\, l\right) r$$

zurück ([2], S. 287).

Als zweites Beispiel betrachten wir die beidseitig gelenkig gelagerte Welle, die in ihrer Mittelebene durch K und M belastet wird und bei der nur die eine Hälfte unter Torsion steht. Die Differentialgleichungen für die Auslenkung, komplex geschrieben, lauten dann für die beiden Stabhälften verschieden, nämlich

$$\alpha r'' - i W r' + \frac{z}{l}\left(K \frac{l}{2} + i M\right) = 0$$

und

$$\alpha r'' + \left(1 - \frac{z}{l}\right)\left(K \frac{l}{2} - i M\right) = 0\,.$$

Für den Zusammenhang zwischen Belastung, Auslenkung und Neigung der Tangente in der

Stabmitte erhalten wir schließlich

$$K = \frac{48\,\alpha}{l^3}\left[\left(1+\frac{3}{32}\,i\,w\,l\right)r+\frac{1}{64}\,i\,w\,l\,v\,l\right],$$
$$i\,M = \frac{8\,\alpha}{l^2}\left[\frac{9}{32}\,i\,w\,l\,r-\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{32}\,i\,w\,l\right)v\,l\right] \qquad (8.4)$$

oder für $M = 0$

$$K = \frac{48\,\alpha}{l^3}\left(1+\frac{3}{32}\,i\,w\,l\right)r\,.$$

9. Beispiele. Wir wollen nun die Ergebnisse zusammenstellen, die man für verschiedene Lagerungsarten der Welle erhält.

Nur in zwei der in Abb. 5 dargestellten Fälle tritt in der bekannten Weise eine einzige kritische Drehzahl auf, nämlich in den Fällen *a* und *d*, und zwar ist hier auch für große Werte von W, wie die Rechnung zeigt, die Auslenkung parallel zur angelegten Kraft. Obschon auch hier die Welle in eine Raumkurve verbogen wird, ist dies Ergebnis aus Symmetriegründen zu erwarten. Die

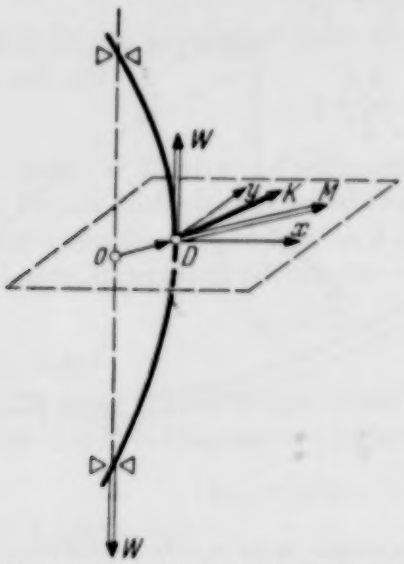

Abb. 4. Die Belastung der gelenkig gelagerten Welle.

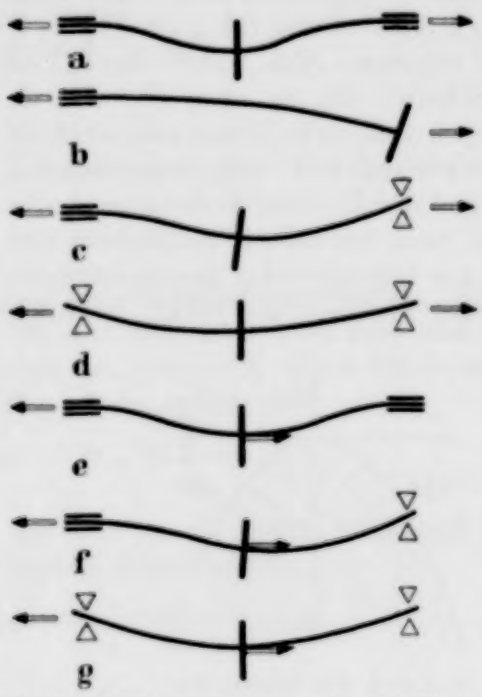

Abb. 5. Verschiedene Lagerungen der Welle.

Erniedrigung der kritischen Drehzahl durch das Torsionsmoment ist von *R. Grammel* ([5], S. 800) angegeben worden. In allen übrigen Fällen wird jede Drehzahl kritisch, indem die Auslenkung nicht in die Kraftrichtung fällt. Besondere Erwähnung verdient vielleicht noch der Fall *e*, bei dem das exponentielle Anwachsen nicht mit $w\,l$ erfolgt, wie in allen andern Fällen, sondern nur mit $(w\,l)^3$, wobei die Amplitude nach einer Schwingung auch bei einer 10 m langen Welle höchstens um ihren 10^{-8}-ten Teil ansteigen kann. Auch der Beiwert von $(w\,l)^2$ weicht übrigens etwas von demjenigen ab, den *R. Grammel* für diesen Fall angibt.

10. Die Berücksichtigung einer Dämpfungskraft. Der Einfluß einer Dämpfungskraft läßt sich leicht übersehen, wenn wir sie proportional der Geschwindigkeit des Scheibenschwerpunktes annehmen und setzen

$$R = -\,m\,\gamma\,\dot{r}_s\,,$$

wobei γ eine Dämpfungszahl bedeutet.

Die Bewegungsdifferentialgleichung (8.1) lautet dann

$$\ddot{r}_s+\gamma\,\dot{r}_s+a\,r_s = a\,e\exp(i\,\omega\,t)\,.$$

Wir fragen uns nun, welche Dämpfung gerade genügt, um das exponentielle Anwachsen der Schwingungen zu verhindern. Dazu müssen wir die Lösung der homogenen Differentialgleichung oder ihre charakteristische Gleichung

$$\sigma^2+\gamma\,\sigma+a = 0$$

untersuchen. Man zeigt leicht, daß der Realteil von σ negativ wird, daß also die Lösung abklingt, wenn die Ungleichung

$$(Im\ a)^2 < \gamma^2\ Re\ a$$

erfüllt ist. Bei einer festen Dämpfung kommt es also darauf an, ob der Wellenquerschnitt, der durch eine Einheitskraft belastet wird — die Scheibenmasse m werde gleich Eins gesetzt —, das stabile Gebiet im Innern der Parabel (Abb. 6) verläßt oder nicht. Dies hängt aber einzig von der Lagerung und $w\,l$ ab, dagegen nicht von der Winkelgeschwindigkeit ω.

Bei verhältnismäßig kleinem Imaginärteil von a, was bei unsern Fällen immer zutrifft, ist die Ungleichung gleichbedeutend mit

$$2\,|Im\sqrt{a}| < \gamma\ .$$

B. Die kritischen Drehzahlen bei Berücksichtigung der Kreiselwirkung.

11. Koordinatentransformation und kinematische Beziehungen. Durch die Kreiselwirkung wird unsere Aufgabe wesentlich verwickelter. Auch hier dürfen wir nicht einfach nach den Drehzuständen fragen, in denen die Welle bei verschwindender Exzentrizität der Scheibe einer stationären Auslenkung fähig ist ([5], S. 804), sondern müssen wirklich das dynamische Problem in Angriff nehmen. Abb. 7 stellt die Scheibe in der allgemeinen Lage dar, mit den äußern Kräften an der Scheibe, die zu einer Dyname $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{M}_d$ im Durchstoßpunkt D zusammengefaßt sind. Sie rühren her vom antreibenden Moment und der Elastizität der ausgelenkten Welle und enthalten möglicherweise ebenfalls ein Antrieb- oder Bremsmoment, das auf den Scheibenrand wirkt. Dieselbe

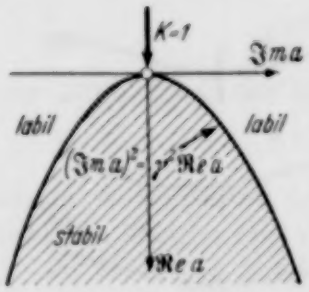

Abb. 6. Der Einfluß der Dämpfung.

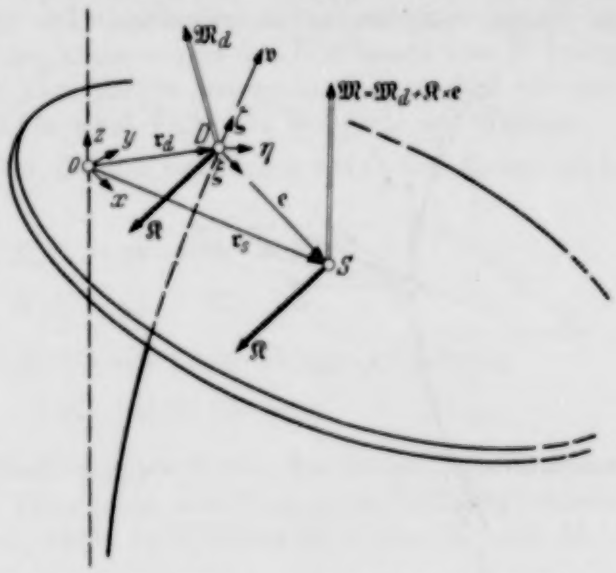

Abb. 7. Die Bezeichnungen an der Scheibe und die Dyname in D oder S.

Belastung ist auch noch nach dem Schwerpunkt S reduziert eingezeichnet, da wir sie für den Drallsatz in diesem Punkt benötigen. (Die Belastung ist also eine Dyname in D oder in S.) Aus welchen Anteilen wir die Belastung im einzelnen zusammengesetzt zu denken haben, wird sich im Laufe der Rechnungen ergeben.

Als Bezugsysteme wählen wir das raumfeste System (x, y, z) und das mit der Scheibe fest verbundene System (ξ, η, ζ), dessen ξ-Achse mit der Exzentrizität $\mathfrak{e}$ des Scheibenschwerpunktes S und dessen ζ-Achse mit dem Tangenten–Einheitsvektor $\mathfrak{v}$ an die elastische Linie im Durchstoßpunkt D zusammenfällt. Um Vektoren von einem System ins andere transformieren zu können, schreiben wir uns die Transformationsformeln ([2], S. 271)

$$\left.\begin{aligned} a_\xi &= a_x \cos\varphi + a_y \sin\varphi - a_z (v_x \cos\varphi + v_y \sin\varphi)\ , \\ a_\eta &= -\,a_x \sin\varphi + a_y \cos\varphi + a_z (v_x \sin\varphi - v_y \cos\varphi)\ , \\ a_\zeta &= +\,a_x\, v_x + a_y\, v_y + a_z \end{aligned}\right\} \qquad (11.1)$$

auf. Der Winkel φ ist dabei der Winkel, der zwischen der x-Achse und der ξ-Achse liegt, wenn wir die Scheibe aufrichten, d. h. wenn wir die ζ-Achse in die z-Achse überführen. Ferner wird vorausgesetzt, daß die Komponenten v_x und v_y des Tangentenvektors so klein sind, daß ihre Quadrate gegen Eins vernachlässigt werden können. Mit andern Größen derselben Größenordnung werden wir ebenso verfahren, ohne jedesmal besonders darauf hinzuweisen. Die Transformation ist orthogonal und normiert, so daß die inverse Transformation sofort angeschrieben werden könnte.

Es empfiehlt sich auch hier, in der (x, y)-Ebene und der (ξ, η)-Ebene die komplexe Schreibweise einzuführen, wodurch wir allerdings zur Unterscheidung der beiden Ebenen gezwungen

sind, etwas ungebräuchliche Bezeichnungen zu verwenden. Es bedeutet
für einen beliebigen Vektor $\mathfrak{a}$: $a_{xy} = a_x + i\,a_y$,
für den Ortsvektor $\mathfrak{r}$: $r = x + i\,y$,
und da auch hier keine Verwechslung möglich ist, $v = v_{xy} = v_x + i\,v_y$.

Es lassen sich dann die ersten beiden Gleichungen von (11.1) zusammenfassen zu

$$a_{\xi\eta} = (a_{xy} - v\,a_z)\exp(-i\varphi). \tag{11.2}$$

Die Bewegung der Scheibe kann in jedem Augenblick beschrieben werden durch die Kinemate im Schwerpunkt S, bestehend aus $\dot{\mathfrak{r}}_s$ und der Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$. Für die wirkliche zeitliche Ableitung eines Vektors gilt allgemein

$$\frac{d\mathfrak{a}}{dt} = \frac{d'\mathfrak{a}}{dt} + \mathfrak{u} \times \mathfrak{a},$$

wo $d'\mathfrak{a}/dt$ die Ableitung in bezug auf das Fahrzeug (die Scheibe) und $\mathfrak{u}$ die Winkelgeschwindigkeit des Fahrzeugs bedeutet. Wenden wir diese Beziehung auf $\mathfrak{v}$ an, für das die scheinbare Ableitung verschwindet, so erhalten wir

$$\dot{v}_x = \omega_y - \omega_z v_y, \qquad \dot{v}_y = \omega_z v_x - \omega_x$$

oder

$$\dot{v} = -i(\omega_{xy} - \omega_z v). \tag{11.3}$$

Nun berücksichtigen wir weiter, daß die Rotation der Scheibe vorwiegend um die ζ-Achse erfolgt, daß also auch gilt

$$|\omega_{xy}| \ll \omega_z$$

und damit nach (11.1) $\omega_z = \omega_\zeta$; diese beiden Winkelgeschwindigkeitskomponenten, die $\dot{\varphi}$ gleich sind, sollen fortan einfach mit ω bezeichnet werden. Für den Gleichlauf, bei dem sich die ganze Figur wie starr um die ursprüngliche Achse dreht, ist sogar $\omega_x = \omega_y = 0$. Auch für die als Gegenlauf bezeichnete Bewegung ist unsere Aussage jedenfalls erfüllt, indem dort

$$\omega_z = 2\,\omega - \omega = \omega \quad \text{und} \quad \omega_{xy} = 2\,\omega\,v$$

gilt ([5], S. 806).

Aus (11.2) und (11.3) folgen zwei Beziehungen, die wir im nächsten Abschnitt brauchen werden. Für die Winkelgeschwindigkeit ergeben die beiden Gleichungen

$$\omega_{\xi\eta} = (\omega_{xy} - \omega\,v)\exp(-i\varphi) = i\,\dot{v}\exp(-i\varphi), \tag{11.4}$$

und daraus folgt weiter

$$\dot{\omega}_{\xi\eta} = (i\,\ddot{v} + \dot{v}\dot{\varphi})\exp(-i\varphi). \tag{11.5}$$

12. Die Kriterien für kritische Drehzahlen mit Kreiselwirkung. Um die Bewegung der Scheibe zu untersuchen, stehen uns der Impulssatz und der Drallsatz zur Verfügung. Der Impulssatz lautet mit m als Scheibenmasse

$$m\,\ddot{\mathfrak{r}}_s = \mathfrak{R},$$

davon lassen sich die x- und y-Komponente zu

$$m\,\ddot{r}_s = K_{xy} \tag{12.1}$$

zusammenfassen.

Den Drallsatz schreiben wir im mitrotierenden Bezugsystem, d. h. als *Eulers*che Gleichungen an. Wir setzen eine so flache Scheibe voraus, daß zwischen den Trägheitsmomenten die Beziehungen gelten

$$C = 2\,A = 2\,B,$$

wodurch sich die *Eulers*chen Gleichungen zu

$$\begin{aligned} B\,\dot{\omega}_\xi &= -B\,\omega\,\omega_\eta + M_\xi, \\ B\,\dot{\omega}_\eta &= +B\,\omega\,\omega_\xi + M_\eta, \\ C\,\dot{\omega}_\zeta &= \qquad\quad + M_\zeta \end{aligned}$$

ergeben. $\mathfrak{M}$ stellt das Moment der Dyname im Scheibenschwerpunkt dar. Die beiden ersten Gleichungen lassen sich zusammenfassen als

$$B\,\dot{\omega}_{\xi\eta} = iB\,\omega\,\omega_{\xi\eta} + M_{\xi\eta}. \tag{12.2}$$

Man ersieht übrigens aus unserem Vorgehen, daß wir von einer schiefen Aufkeilung der Scheibe auf die Welle abgesehen haben.

Wir setzen nun für die weitere Untersuchung stationären Betrieb voraus; die ζ-Komponente des Momentes $\mathfrak{M}_d$ (ein möglicherweise an der Scheibe auftretendes Bremsmoment ist darin schon berücksichtigt) soll also verschwinden. M_ζ besteht demnach nur aus der ζ-Komponente des Momentes von $\mathfrak{K}$ bezüglich dem Schwerpunkt. Ist die Größe e^2/k^2 sehr klein gegen Eins, so schwankt — kleine Auslenkungen des Schwerpunktes vorausgesetzt — die Winkelgeschwindigkeit so wenig um den Mittelwert ω, daß wir sie als unabhängig von der Zeit betrachten dürfen. Wir nehmen also an, daß stationärer Betrieb mit stationärem Drehzustand ($\dot{\omega} = 0$) zusammenfalle ([5], S. 777) und $\varphi = \omega t$ wird.

Da das resultierende antreibende Moment verschwinden soll, bleiben in der Dyname in D nur noch die Beiträge, die von der Elastizität der Welle infolge der Auslenkung geliefert werden. Sowohl die Kraft wie auch das Moment fallen in die (ξ, η)-Ebene, und es gilt

$$K_{\xi\eta} = K_{xy} \exp(-i\omega t)$$

und

$$M_{\xi\eta} = M_{xy} \exp(-i\omega t), \tag{12.4}$$

wobei, wegen $K_\zeta = 0$, $M_{\xi\eta}$ in D und S gleich groß ist.

Den Zusammenhang zwischen der Auslenkung, der Neigung der Tangente und der Belastung der Welle haben wir im Abschnitt **8** hergeleitet. Dieser Zusammenhang ist für kleine Auslenkungen linear. Wir schreiben ihn hier in allgemeiner Form, um verschiedene Lagerungen gleichzeitig zu erfassen:

$$\left.\begin{aligned} -K_{xy} &= m\,a\,r_d + m\,c\,v, \\ i\,M_{xy} &= B\,d\,r_d + B\,b\,v. \end{aligned}\right| \tag{12.5}$$

Die Größen a, b, c, d sind, abgesehen von m und B, die wir aus Dimensionsgründen willkürlich hinzufügen, die dualen Größen zu den *Maxwell*schen Einflußzahlen.

Setzen wir nun (12.5) in (12.1) ein, so erhalten wir

$$\ddot{r}_s + a\,r_d + c\,v = 0.$$

Es ist aber

$$r_d = r_s - e \exp(i\omega t), \tag{12.6}$$

und damit wird die obere Gleichung zu

$$\ddot{r}_s + a\,r_s + c\,v = a\,e \exp(i\omega t). \tag{12.7}$$

Wir wollen nun ebenfalls (12.2) ins feste Koordinatensystem überführen und benützen dazu die Gleichungen (11.4), (11.5) und (12.3):

$$(i\,B\ddot{v} + 2\,B\dot{v}\omega) \exp(-i\omega t) = M_{xy} \exp(-i\omega t).$$

Daraus ergibt sich mit (12.4), (12.5) und (12.6)

$$\ddot{v} - 2\,i\,\omega\,\dot{v} + b\,v + d\,r_s = d\,e \exp(i\omega t). \tag{12.8}$$

Diese Gleichung stellt zusammen mit (12.7) das Differentialgleichungssystem dar, das unser Problem beherrscht. Man könnte es leicht auf eine einzige Differentialgleichung 4. Ordnung in r_s zurückführen. Eine partikuläre Lösung liefert uns der Ansatz

$$r_s = r_0 \exp(i\omega t) \quad \text{und} \quad v = v_0 \exp(i\omega t).$$

Er führt auf das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} r_0(-\omega^2 + a) + v_0 c &= a\,e, \\ r_0\,d + v_0(\omega^2 + b) &= d\,e \end{aligned}$$

für r_0 und v_0, und daraus erhalten wir

$$r_0 = \frac{(\omega^2 + b)\,a - c\,d}{(-\omega^2 + a)(\omega^2 + b) - c\,d}\,e. \tag{12.9}$$

Die kritischen Drehzahlen treten genau dann auf, wenn die Determinante verschwindet, nämlich bei

$$(\omega_k^2 - a)(\omega_k^2 + b) + c\,d = 0. \tag{12.10}$$

Die Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems erhalten wir ebenfalls durch einen Exponentialansatz

$$r_s = r_0 \exp(i\lambda\omega_0 t) \quad \text{und} \quad v = v_0 \exp(i\lambda'\omega_0 t). \tag{12.11}$$

Darin verwenden wir die dimensionslose Größe λ, vervielfacht mit der kritischen Drehzahl ω_0, die ohne Kreiselwirkung und beim Fehlen des Torsionsmomentes auftritt. Damit wir nichttriviale Lösungen erhalten, muß die Determinante des Gleichungssystems verschwinden:

$$(\lambda^2\omega_0^2 - a)(\lambda^2\omega_0^2 - 2\lambda\omega_0\omega - b) - cd = 0. \tag{12.12}$$

Weil ω_0 eine positive Zahl darstellt, wächst die Schwingung unbegrenzt, wenn der Imaginärteil von λ kleiner als Null wird.

Die Gleichungen (12.10) und (12.12) ermöglichen uns, für einen vorgegebenen Stab die kritischen Drehzahlen festzustellen, sofern wir den Zusammenhang zwischen Belastung und Auslenkung kennen. Wir untersuchen nun die beiden Fälle, den einseitig eingespannten Stab und den beidseitig gelenkig gelagerten Stab, für die wir in Abschnitt **8** diesen Zusammenhang berechnet haben.

13. Kritische Drehzahlen für die fliegende Welle. Für die fliegende Welle liefert ein Vergleich von (12.5) mit (8.3) für die Einflußgrößen

$$\left.\begin{aligned} a &= 4\omega_0^2, & c &= -\tfrac{2}{0}\frac{l}{3}(6 - iwl), \\ d &= -\frac{\omega_0^2}{3\varrho^2 l}(6 + iwl), & b &= \omega_0^2\frac{1}{3\varrho^2}\left(4 - \frac{iwl}{2}\right). \end{aligned}\right| \tag{13.1}$$

Die darin neu verwendeten Abkürzungen bedeuten $\varrho = k/l$, wo der Trägheitshalbmesser $k = \sqrt{\frac{B}{m}}$ ist, und $\omega_0^2 = \frac{3\alpha}{m l^3}$ ([2], S. 288).

Wir bemerken hier nur nebenbei, daß durch das Torsionsmoment die Reziprozitätsbeziehung $mc = Bd$, die sonst gilt, zerstört wird ([5], S. 95).

Bei der Frage nach den kritischen Drehzahlen stellt man fest, daß sich aus der partikulären Lösung der Differentialgleichung keine kritische Drehzahl ergibt. Um dies nachzuweisen, spaltet man die Gleichung (12.10), die jetzt

$$3\varrho^2\omega^4 + \omega_0^2\left(4 - 12\varrho^2 - \frac{iwl}{2}\right)\omega^2 + \omega_0^4(-4 + 2iwl) = 0 \tag{13.2}$$

lautet, in Real- und Imaginärteil auf. Wir werden am Schluß dieses Abschnittes darauf zurückkommen.

Die Untersuchung der allgemeinen Lösung wird uns zeigen, daß für jede Drehzahl eine Lösung mit negativem Imaginärteil vorhanden ist, die Berücksichtigung der Kreiselwirkung also grundsätzlich nichts an der Tatsache ändert, daß durch das Torsionsmoment jede Drehzahl kritisch wird.

Die charakteristische Gleichung (12.12) der homogenen Differentialgleichung lautet für die fliegende Welle mit der Abkürzung $u = \omega/\omega_0$

$$(\lambda^2 - 4)\left(\lambda^2 - 2\lambda u - \frac{1}{3\varrho^2}\left[4 - \frac{iwl}{2}\right]\right) - \frac{4}{\varrho^2} = 0.$$

Um uns einen Überblick über die Verhältnisse zu verschaffen, entwickeln wir die Wurzeln λ nach der kleinen Größe iwl:

$$\lambda = \lambda_1 + iwl\lambda_2 + \cdots.$$

λ_1 genügt dabei der Gleichung

$$(\lambda_1^2 - 4)\left(\lambda_1^2 - 2\lambda_1 u - \frac{4}{3\varrho^2}\right) - \frac{4}{\varrho^2} = 0 \tag{13.3}$$

oder

$$(\lambda_1^2 - 4)\lambda_1(\lambda_1 - 2u) = \frac{4}{3\varrho^2}(\lambda_1^2 - 1).$$

und für

$$\lambda_2 = \frac{\partial\lambda}{\partial(iwl)}(w = 0)$$

erhält man

$$\frac{1}{\lambda_2} = -12\left[\frac{4\lambda_1}{(\lambda_1^2-4)^2} + \varrho^2(\lambda_1 - u)\right]. \tag{13.4}$$

Gerade für dieses λ_2 interessieren wir uns; denn nach Gleichung (12.11) ist die Schwingungsamplitude nach der Zeiteinheit auf $r_s(1) = r_s(0)\exp(-\lambda_2 w l\,\omega_0)$ gestiegen.

Um λ_2 in Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit und des Trägheitsmomentes darstellen zu können, müßte λ_1 aus der Gleichung (13.3) bestimmt und in (13.4) eingesetzt werden. Wir ermitteln den Zusammenhang jedoch einfacher graphisch. Den beiden Gleichungen (13.3) und (13.4) entnehmen wir ohne Rechnung, daß λ_1 und ebenfalls λ_2 lediglich das Vorzeichen wechseln, wenn man u durch $-u$ ersetzt. Wir wählen $u > 0$, was keine Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet. Um λ_2 in Abhängigkeit von u mit ϱ^2 als Parameter der Kurvenschar auftragen zu können, berechnet man mit (13.3) aus λ_1 die Größe

$$u = \frac{\lambda_1}{2} - \frac{2}{3\varrho^2}\frac{(\lambda_1^2-1)}{\lambda_1(\lambda_1^2-4)} \tag{13.5}$$

und daraus das zu u gehörige λ_2 mit (13.4).

Abb. 8 zeigt, daß bei größeren Trägheitsradien der Scheibe die Aufschaukelung langsamer erfolgt, daß jedoch die Kreiselwirkung die Welle nie vollständig stabilisieren kann. Außerdem wächst die Amplitude umso langsamer, je größer die Drehzahl ist. Abb. 8 umfaßt, nach links und nach rechts aufgetragen, gleichzeitig die Fälle $w < 0$ (Antrieb an der Welle, Bremsung an der Scheibe) und $w > 0$ (Antrieb an der Scheibe, Abnahme des Momentes an der Welle). Da Abb. 8 nicht symmetrisch ist, besteht zwischen diesen Fällen ein Unterschied. Es sei gleich hier erwähnt, daß bei der gelenkig gelagerten Welle, wie man aus (16.3) entnimmt, diese beiden Möglichkeiten sich nicht unterscheiden. Auf eine Eigentümlichkeit, die sich für kleine Trägheitsradien ergibt, werden wir bei unserem zweiten Beispiel (Abschnitt 16) zurückkommen.

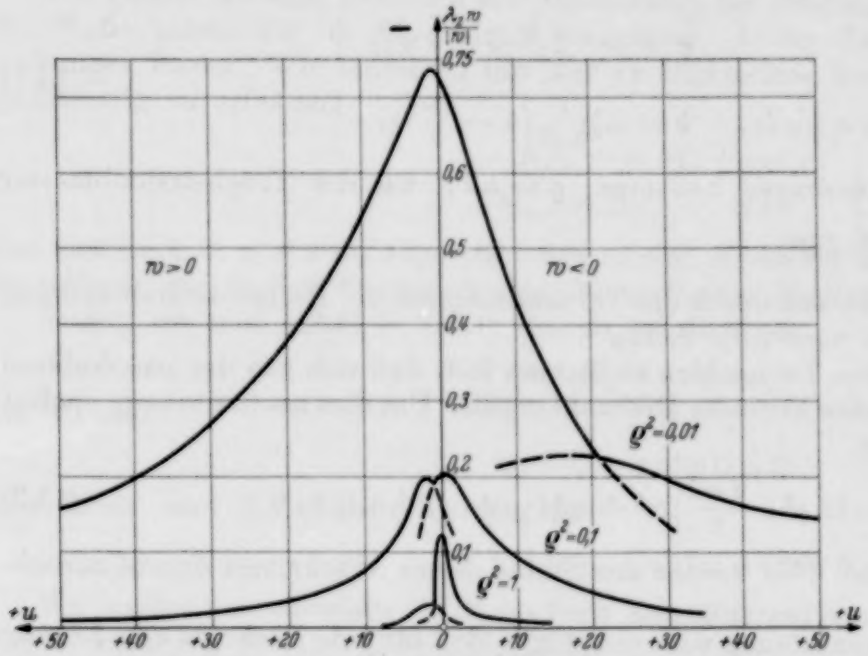

Abb. 8. Das Anwachsen der Amplitude bei der fliegenden Welle.

In unseren Ergebnissen sind die Sonderfälle $\varrho = 0$ und $w = 0$ ebenfalls enthalten. Wenn wir die Kreiselwirkung vernachlässigen, d. h. $\varrho = 0$ setzen, so müssen wir zu den Ergebnissen von *H. Ziegler* ([2], S. 288) gelangen, und dies ist tatsächlich der Fall. Andererseits müssen die Ergebnisse in diejenigen von *R. Grammel* übergehen, wenn wir die Wirkung des Torsionsmomentes vernachlässigen, d. h. $w = 0$ setzen. Die Gleichung (13.2) gibt nach ω/ω_0 aufgelöst die bekannten kritischen Drehzahlen des Gleichlaufs ([5], S. 806). Dagegen erhalten wir die kritischen Drehzahlen des Gegenlaufs nicht, obschon unsere Voraussetzungen sie keineswegs ausschließen (vgl. S. 271). Der Gegenlauf läßt sich jedoch nur deuten als Resonanzerscheinung, erzeugt durch äußere Schwingungen.

Bei der Beurteilung, ob eine Drehzahl als kritisch angesprochen werden muß oder nicht, darf ein Punkt nicht außer acht gelassen werden. Als kritisch haben wir solche Drehzahlen bezeichnet, bei denen sich die Scheibe mit der Zeit beliebig weit von der Ruhelage entfernt. In Wirklichkeit genügt es jedoch schon, daß die Scheibe um einen gewissen endlichen Betrag aus der Ruhelage ausweicht, um den Rotor zu gefährden. Ohne Berücksichtigung des äußeren Momentes braucht man auf diese Unterscheidung nicht zu achten, weil sich diese gefährlichen Drehzahlen unmittelbar an die eigentlich kritischen Drehzahlen anschließen. In unserem Fall können aber sehr wohl gefährliche Drehzahlen auftreten, obschon eigentliche kritische, wie wir gezeigt haben, bei der partikulären Lösung ausgeschlossen sind. Die Größe der Auslenkung berechnet sich aus den Gleichungen (12.9) und (13.1). Den größten Wert nimmt $|r_0|$ offenbar

an für

$$3\,\varrho^2\,\omega^4 + \omega_0^2(4 - 12\,\varrho^2)\,\omega^2 - 4\,\omega_0^4 = 0\,.$$

Setzen wir noch $\omega^2 = \omega_0^2\,q$, wobei $1 \leq q\,(\varrho^2) \leq 2$ ([5], S. 807), so wird

$$|r_0|_{max} = \frac{8}{|w\,l|}\,\frac{(1 + 3\,\varrho^2\,q)}{(4 - q)}\,e\,,$$

und $|r_0|_{max}$ läßt sich in die Grenzen einschließen

$$\frac{8}{3\,|w\,l|}\,e \leq |r_0|_{max} \leq \frac{8\left(\frac{3}{2} + 9\,\varrho^2\right)}{3\,|w\,l|}\,e\,.$$

Die untere Grenze gilt für den Fall, daß die Kreiselwirkung vernachlässigt werden darf. Die Gefährdung der Welle wird also hier durch die Kreiselwirkung erhöht. Eine Abschätzung von $r_0|_{max}$ zeigt, daß man bei fliegenden Wellen normaler Länge auch im günstigsten Fall mit $r_0|_{max} \gtrsim 200\,e$ rechnen muß.

14. Der Einfluß der Dämpfung. Das unerwartete Ergebnis, daß bei der fliegenden Welle jede Drehzahl kritisch ist, wird bewirkt durch das Torsionsmoment W oder also durch die gegen Eins kleine Größe $w\,l$. Es ist deshalb zu erwarten, daß auch schon eine geringe Dämpfung die Verhältnisse grundlegend verändert. Wir wählen wiederum als einfachsten Ansatz die der Geschwindigkeit proportionale Dämpfung. Unter dieser Annahme schreibt sich dann (12.1)

$$m\,\ddot{r}_s + m\,\gamma\,\dot{r}_s = K_{xy}\,.$$

Die Rechnungen bleiben nun Schritt für Schritt dieselben wie in Abschnitt **12**. Die partikuläre Lösung liefert entsprechend (12.10) eine kritische Drehzahl, wenn die Bedingung

$$(\omega_k^2 - i\,\gamma\,\omega_k - a)\,(\omega_k^2 + b) + c\,d = 0 \tag{14.1}$$

erfüllt ist.

Die charakteristische Gleichung des homogenen Differentialgleichungssystems lautet an Stelle von (12.12)

$$(\lambda^2\,\omega_0^2 - i\,\lambda\,\omega_0\,\gamma - a)\,(\lambda^2\,\omega_0^2 - 2\,\lambda\,\omega_0\,\omega - b) - c\,d = 0\,, \tag{14.2}$$

und die Schwingung wächst wiederum exponentiell an, wenn der Imaginärteil von λ kleiner als Null ist.

15. Die Dämpfung bei der fliegenden Welle. Um die Wirkung der Dämpfung bei der fliegenden Welle zu übersehen, untersuchen wir die Gleichung (14.2). Wenn wir nämlich eine Dämpfung „einschalten" und die Dämpfungszahl immer größer werden lassen, so bleibt vorerst immer noch jede Drehzahl kritisch, das Aufschaukeln erfolgt jedoch langsamer, während gleichzeitig die partikuläre Lösung immer gefährlicher wird. Bei einer bestimmten Dämpfungszahl γ_0, die wir als Grenzdämpfungszahl bezeichnen wollen, besteht die Lösung der homogenen Gleichung aus ungedämpften harmonischen Schwingungen; dagegen wird jetzt die gefährliche Drehzahl zu einer eigentlich kritischen. Für eine Dämpfung, die größer als die Grenzdämpfung ist, stellt die Lösung der homogenen Gleichung abklingende Schwingungen dar, und die eigentlich kritische Drehzahl ist wiederum nur noch mehr oder weniger gefährlich.

Die Grenzdämpfung γ_0 bestimmen wir durch die Forderung, daß in (14.2) λ reell sein soll. Für die fliegende Welle führt die Aufspaltung in Real- und Imaginärteil auf die beiden Gleichungen

$$(\lambda^2 - 4)\left(\lambda^2 - 2\,\lambda\,u - \frac{4}{3\,\varrho^2}\right) - \frac{4}{\varrho^2} = -\frac{1}{6\,\varrho^2}\,\lambda\,\frac{\gamma_0}{\omega_0}\,w\,l$$

und

$$(\lambda^2 - 4)\,\frac{w\,l}{6\,\varrho^2} - \lambda\,\frac{\gamma_0}{\omega_0}\left(\lambda^2 - 2\,\lambda\,u - \frac{4}{3\,\varrho^2}\right) = 0\,.$$

Die Dämpfungszahl wird, wie vermutet, proportional zu $w\,l$. Dadurch fällt in der obern Gleichung die rechte Seite weg, und ein Vergleich mit (13.3) zeigt, daß λ zu λ_1 wird. Für die Grenzdämpfung ergibt sich

$$\gamma_0 = \frac{(\lambda_1^2 - 4)^2}{24\,\lambda_1}\,\omega_0\,w\,l\,.$$

Für jede Drehzahl erhalten wir allerdings vier verschiedene Werte von λ_1, also auch vier mögliche γ_0; die wirkliche Grenzdämpfung wird durch das größte unter ihnen beschrieben und kann mit Hilfe von (13.5) berechnet werden.

Man kann zeigen, daß unser — wie wir schon betont haben — sehr unvollkommene Dämpfungsansatz auch bei der Annahme von großen Dämpfungszahlen nicht imstande ist, die Schwingung vollständig zu dämpfen. Es läßt sich bei jeder festen Dämpfungszahl eine Drehzahl angeben derart, daß alle höheren Drehzahlen kritisch sind. Diese Grenzdrehzahl hängt noch vom Trägheitsradius ab.

16. Kritische Drehzahlen bei der gelenkig gelagerten Welle. Als zweites Beispiel für die Untersuchung von kritischen Drehzahlen wählen wir die beidseitig gelenkig gelagerte Welle. Dabei soll das Moment W nicht am andern Wellenende, sondern an der Scheibe abgenommen werden, so daß nur die eine Hälfte der Welle unter Torsion steht (Abb. 4).

Die Einflußzahlen haben wir in Abschnitt **6** berechnet. Die kritische Drehzahl ohne Torsion und Kreiselwirkung beträgt bei dieser Lagerung

$$\omega_0^2 = \frac{48\,\alpha}{m\,l^3}.$$

Damit ergibt sich aus (8.4) und (12.5)

$$a = \omega_0^2\left(1 + \frac{3}{32}\,i\,w\,l\right), \qquad c = \omega_0^2\,\frac{l}{64}\,i\,w\,l,$$

$$d = -\,\omega_0^2\,\frac{3}{64\,\varrho^2\,l}\,i\,w\,l, \qquad b = \omega_0^2\,\frac{1}{4\,\varrho^2}\left(1 - \frac{1}{32}\,i\,w\,l\right).$$

Das weitere Vorgehen ist gleich wie bei der fliegenden Welle. Die Gleichung (12.10) lautet

$$\left[\omega_k^2 - \omega_0^2\left(1 + \frac{3}{32}\,i\,w\,l\right)\right]\left[\omega_k^2 + \omega_0^2\,\frac{1}{4\,\varrho^2}\left(1 - \frac{1}{32}\,i\,w\,l\right)\right] = 0, \tag{16.1}$$

und daraus ergibt sich keine eigentlich kritische Drehzahl.

Als charakteristische Gleichung für das homogene Gleichungssystem erhalten wir aus (12.12)

$$\left[\lambda^2 - \left(1 + \frac{3}{32}\,i\,w\,l\right)\right]\left[\lambda^2 - 2\,\lambda\,u - \frac{1}{4\,\varrho^2}\left(1 - \frac{1}{32}\,i\,w\,l\right)\right] = 0. \tag{16.2}$$

Eine wesentliche Änderung gegenüber der fliegenden Welle stellt hier die Tatsache dar, daß das Glied $c\,d$ wegen seiner Größenordnung wegfällt und deshalb die charakteristische Gleichung aufspaltet. Die Bewegung des Schwerpunktes ist mit der Bewegung des Tangentenvektors nur durch das Torsionsmoment, in unserer Näherung also sehr schwach, gekoppelt. Für die Untersuchung der Stabilität der Welle greift man am besten auf die Gleichungen (12.7) und (12.8) zurück. Von Interesse sind wiederum besonders die Imaginärteile λ_2 der Wurzeln

$$\lambda = \pm\left(1 + \frac{3}{64}\,i\,w\,l\right), \qquad \lambda = u \pm \sqrt{u^2 + \frac{1}{4\,\varrho^2}} \mp \frac{i\,w\,l}{128\,\varrho\sqrt{4\,u^2\varrho^2 + 1}},$$

da sie das Aufschaukeln der Schwingung je Zeiteinheit bestimmen:

$$\lambda_2 = \pm\frac{3}{64}, \qquad \lambda_2 = \pm\frac{1}{128\,\varrho\sqrt{4\,u^2\varrho^2 + 1}}. \tag{16.3}$$

Wir bemerken, daß der eine Wert von der Kreiselwirkung und der Drehzahl unabhängig ist.

Der andere Wert zeigt uns eine Eigentümlichkeit, die schon bei der fliegenden Welle (Abb. 8) auftritt. Für kleine Trägheitsradien ($u^2\,\varrho^2 \ll 1$) ist

$$\lambda_2 = \pm\frac{1}{128\,\varrho\,(1 + 2\,u^2\varrho^2)},$$

woraus wir schließen müssen, daß das Ausweichen aus der Ruhelage für sehr kleine ϱ außerordentlich rasch erfolgt. Diese Lösungen münden für $\varrho \to 0$ demnach nicht in diejenigen ein, die wir ohne Kreiselwirkung aus (8.1) erhalten, und man muß bei der Belastung durch ein Moment W die Kreiselwirkung grundsätzlich immer mitberücksichtigen. Ist kein Torsionsmoment vorhanden, so spielen diese Schwingungen sehr hoher Frequenz allerdings keine Rolle.

Wir streifen noch kurz die Ergebnisse, die wir ohne Kreiselwirkung erhalten. Die Gleichung (16.2) zeigt, daß natürlich auch in diesem Falle jede Drehzahl kritisch ist. Vernach-

lässigen wir die Torsion der Welle, so ergibt (16.1) die bekannten kritischen Drehzahlen; die Kreiselwirkung spielt keine Rolle, wie aus Symmetriegründen zu erwarten ist.

Auch bei dieser Lagerung kann eine gefährliche Drehzahl auftreten an der Stelle, wo sich die ursprüngliche kritische Drehzahl befindet. Aus (12.9) folgt für den größten Ausschlag

$$|r_0|_{max} = \frac{32}{3\,|w\,l|}\,e\,,$$

wobei wir berücksichtigt haben, daß die größte Amplitude für $\omega = \omega_0$ auftritt.

Bei dieser Lagerung sind also grundsätzlich die Verhältnisse genau dieselben wie bei der fliegenden Welle. Die kritische Drehzahl, die ohne Torsionsmoment vorhanden ist, wird zwar immer noch gefährlich, aber nicht mehr eigentlich kritisch. Dagegen wird jede Drehzahl kritisch; wenn die Kreiselwirkung überhaupt einen Einfluß hat, so wirkt sie in stabilisierendem Sinne.

17. Die Dämpfung bei der gelenkig gelagerten Welle. Wenn wir nun auch für die beidseitig gelenkig gelagerte Welle den Einfluß unseres Dämpfungsansatzes untersuchen, so stellen wir fest, daß wir auch hier nur die charakteristische Gleichung (14.2) des homogenen Differentialgleichungssystems zu betrachten brauchen. Das Aufspalten der Gleichung durch das Wegfallen des Gliedes $c\,d$ bewirkt hier, daß zwei Wurzeln von der Dämpfung völlig unberührt bleiben, nämlich die Wurzeln von

$$(\lambda^2\,\omega_0^2 - 2\,\lambda\,\omega_0\,\omega - b) = 0\,,$$

welche deshalb notwendigerweise zu Instabilität führen. Eine Dämpfungskraft, wie wir sie eingeführt haben, genügt in diesem Falle niemals zur Stabilisierung, wie groß wir auch die Dämpfungszahl wählen. Es ist möglich, diesem Übelstande abzuhelfen, wenn man ein Moment einführt, das das Wippen der Scheibe abdämpft. Wir begnügen uns hier mit der Feststellung, daß ein solcher Ansatz wirklich zum Ziele führt.

Die Grenzdämpfung γ_0, die wenigstens die abdämpfbare Schwingung gerade stabilisiert, berechnet sich leicht zu

$$\gamma_0 = \frac{3}{32}\,|w\,l|\,\omega_0\,.$$

Die nicht abdämpfbare Schwingung wird übrigens nach (16.3) mit zunehmender Drehzahl immer ungefährlicher.

(Eingegangen am 12. Februar 1952.)

Anschrift des Verfassers: Dipl. Phys. *A. Trösch*, Institute for Mathematics and Mechanics, New York University, 45 Fourth Avenue, New York 3, N. Y.

Zur Theorie der rechteckigen Fundamentplatten und Pilzdecken *.

Von W. Müller.

1. Einleitung Für die Durchbiegung von Platten und Pilzdecken hat bekanntlich *V. Lewe* nach der *Fourier*schen Methode Doppelreihen aufgestellt, die aber wegen der schlechten Konvergenz für die praktische Rechnung wenig geeignet sind. Um die Voraussetzungen möglichst allgemein zu halten und möglichst viele Sonderfälle zu erfassen, wollen wir im Folgenden von der Annahme einer elastisch nachgiebigen Unterlage der Rechteckplatte ausgehen und die Umwandlung der dafür gültigen *Lewe*schen Doppelreihen in einfache gut konvergierenden Reihen methodisch und in direkter Weise mit Hilfe einiger Grundformeln ableiten und uns dabei in dieser vorläufigen Mitteilung zunächst auf die Fälle der gleichmäßigen und der Punktbelastung beschränken, zur Vorbereitung auf die in Aussicht genommene Behandlung der Fälle mit rechteckiger Angriffs- bzw. Stützfläche, die mathematisch einige Schwierigkeiten bietet[1].

2. Methode der Doppelreihen. Wenn wir als Reaktionswirkung der Unterlage eine Kraft annehmen, welche der Durchbiegung w proportional ist, so lautet die grundlegende Differentialgleichung

$$\Delta\Delta w + L^4 w = \frac{p}{N}, \qquad \text{mit} \qquad N = \frac{1}{12}\frac{E h^3}{1-\nu^2}, \tag{1}$$

wobei E den Elastizitätsmodul, h die Plattendicke und ν die *Poisson*sche Konstante bezeichnet. Die Größe L hat die Dimension einer reziproken Länge; der Faktor $c = L^4 N$ (kg/cm³) wird im Allgemeinen auch als Bettungsziffer[2] bezeichnet. Im Falle der schwimmenden Platte ist c mit dem spezifischen Gewicht des flüssigen Mediums gleichbedeutend.

Wenn man von der klassischen Lösung von *Navier* absieht, so hat namentlich *V. Lewe*[3] die Methode der *Fourierschen Doppelreihen* ausgebildet. Sie besteht im wesentlichen darin, daß man die Druckfunktion, die als stetig oder stückweise stetig vorausgesetzt wird, in eine trigonometrische Doppelreihe, etwa nach $\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$ bzw. $\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}$ mit den Perioden $2a$ und $2b$ entwickelt, während für w ein entsprechender Reihenansatz mit unbestimmten Koeffizienten gemacht wird. Nach Bildung von $\Delta\Delta w$ und Einsetzung in (1) ergibt sich dann durch Gleichsetzung zweier Reihen die Möglichkeit, die unbestimmten Koeffizienten zu ermitteln. Dabei treten vor allem zwei Fälle hervor, der Fall der gleichmäßigen Belastung der Gesamtplatte und der Fall der gleichmäßigen Belastung längs rechteckiger Druck- oder Stützflächen, der in der Grenze in den Fall der punktförmigen Belastung oder Stützung durch Einzelkräfte übergeht.

a) Für die gleichmäßige Belastung einer drehungsfrei aufgelegten rechteckigen Platte mit den Seiten a und b und den Randbedingungen $\Delta w = 0$ für $x = 0, a$ und $y = 0, b$ haben wir mit $\xi = x/a$, $\eta = y/a$, $\lambda = b/a$ die Druckfunktion

$$p = \frac{16\,p_0}{\pi^2}\sum_m{}'\sum_n{}'\frac{1}{m\,n}\sin m\pi\,\xi\sin n\pi\frac{\eta}{\lambda} \qquad (m, n = 1, 3, 5\ldots), \tag{2}$$

wenn der Ursprung der Koordinaten in die linke untere Ecke des Rechtecks gelegt wird und die Achsen den Rechtecksseiten parallel sind. Mit dem Ansatz

$$w = \sum_m{}'\sum_n{}' C_{m\,n}\sin m\pi\,\xi\sin n\pi\frac{\eta}{\lambda} \tag{3}$$

---

* Die vorliegende Arbeit ist einer Reihe von Untersuchungen entnommen, die in Verbindung mit dem Institut für Beton u. Stahlbeton der Technischen Hochschule Karlsruhe (Prof. Dr. *K. Kammüller*) durchgeführt wurden.

[1] Vgl. für das Folgende: *A. Nadai*, Die elastischen Platten, Berlin 1925; *K. Girkmann*, Flächentragwerke S. 176—178 f, Wien 1948; *S. Timoshenko*, Theory of Plates and Shells S. 239, 248, New York a. London 1940.

[2] *F. Schleicher*, Beton u. Eisen, 26. (1927) S. 433 f.; *K. Hayashi*, Zur Theorie des Trägers auf elastischer Unterlage, Berlin 1921. Weitere Literatur wird an späterer Stelle angegeben.

[3] *V. Lewe*, Bauingenieur, 1 (1920) S. 37; 1 (1920) S. 631; 3 (1922) S. 314 u. 344; 4 (1923) S. 453.

findet man dann, wie bekannt, durch Koeffizientenvergleich

$$C_{m\,n} = \frac{16\,p_0\,b^4}{\pi^2\,m\,n\,[(n^2\pi^2 + m^2\lambda^2\pi^2)^2 + (L\,b)^4]} \tag{4}$$

und daraus die Durchbiegung

$$w = \frac{16\,p_0\,b^4}{N\pi^2} \sum\sum \frac{\sin m\pi\,\xi \sin n\pi\,\frac{\eta}{\lambda}}{m\,n\,[\pi^4\,(n^2 + m^2\lambda^2)^2 + (L\,b)^4]} \qquad (m,\,n = 1,\,3,\,5\,\ldots)\,. \tag{5}$$

b) Bei der lokalen Belastung auf einem Rechteck, dessen Mittelpunkt die Koordinaten $x_0 = \xi_0\,a$, $y_0 = \eta_0 a$ hat, und dessen Seiten $2a\,\alpha$ und $2a\,\beta$ sind (Abb. 1), hat man die Belastungsfunktion in der Form

$$p = p_0 f(x)\,g(y) \tag{6}$$

anzusetzen, wo für f und g die Reihen

$$f(x) = \sum a_m \sin m\pi\,\xi\,, \qquad g(y) = \sum b_n \sin n\pi\,\frac{\eta}{\lambda} \tag{7}$$

gelten sollen. Dabei erhalten wir für die Koeffizienten a_m und b_m nach *Fourier*

$$a_m = \frac{2}{a}\int_0^a f(x) \sin m\pi\,\xi\,, \qquad b_n = \frac{2}{a}\int_0^b g(y) \sin n\pi\,\frac{\eta}{\lambda}\,. \tag{8}$$

Bei der Integration ist z B. $f(x)$ für

$$x_0 - a\,\alpha < x < x_0 + a\,\alpha$$

gleich Eins und außerhalb dieser Grenzen

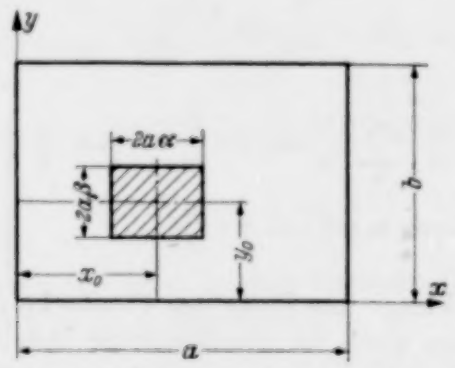

Abb. 1. Aufliegende und lokal belastete Platte.

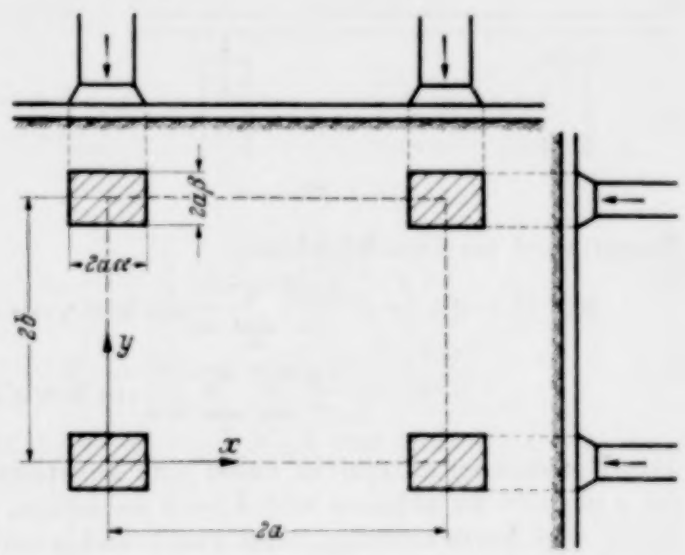

Abb. 2. Fundamentplatte.

Null zu setzen. Entsprechendes gilt für $g(y)$. Man braucht also nur von $x_0 - a\,\alpha$ bis $x_0 + a\,\alpha$, bzw. von $y_0 - a\,\beta$ bis $y_0 + a\,\beta$ zu integrieren und erhält dann durch eine einfache Rechnung

$$a_m = \frac{4}{m\pi} \sin m\pi\,\xi_0 \sin m\pi\,\alpha\,, \qquad b_n = \frac{4}{n\pi} \sin n\pi\,\frac{\eta_0}{\lambda} \sin n\pi\,\frac{\beta}{\lambda}\,. \tag{9}$$

Damit wird

$$p(x\,y) = \frac{16\,p_0}{\pi^2} \sum_m \sum_n \frac{1}{m\,n} \sin m\pi\,\xi_0 \sin m\pi\,\alpha \sin n\pi\,\frac{\eta_0}{\lambda} \sin n\pi\,\frac{\beta}{\lambda} \sin m\pi\,\xi \sin n\pi\,\frac{\eta}{\lambda} \qquad (m,\,n = 1,\,2,\,3\,\ldots)\,, \tag{10}$$

und schließlich ergibt sich durch Koeffzientenvergleich

$$w = \frac{16\,p_0\,b^4}{N\pi^6} \sum_m \sum_n \frac{\sin m\pi\,\xi_0 \sin m\pi\,\alpha \sin n\pi\,\frac{\eta_0}{\lambda} \sin n\pi\,\frac{\beta}{\lambda} \sin m\pi\,\xi \sin n\pi\,\frac{\eta}{\lambda}}{m\,n\left[(n^2 + m^2\lambda^2)^2 + \left(\frac{L\,b}{\pi}\right)^4\right]}\,. \tag{11}$$

Wenn α und β gegen Null gehen und $4\,p_0\,a^2\,\alpha\,\beta = P$ gesetzt wird, so haben wir bei punktartiger Belastung

$$w = \frac{4\,P\,b^3}{N\,a\,\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{\sin m\pi\,\xi_0 \sin n\pi\,\frac{\eta_0}{\lambda} \sin m\pi\,\xi \sin n\pi\,\frac{\eta}{\lambda}}{(n^2 + m^2\lambda^2)^2 + \left(\frac{L\,b}{\pi}\right)^4} \qquad (m,\,n = 1,\,2,\,3\,\ldots)\,. \tag{12}$$

c) Für die Fundamentplatte (Abb. 2) und Pilzdecke (Abb. 3) wollen wir hier eine unendlich ausgedehnte und von einem regelmäßigen Säulengitter mit rechteckigen Grundquerschnitten, belastete bzw. gestützte Platte voraussetzen. Legen wir den Ursprung in einen der Säulenmittelpunkte und sind $2a$ und $2b$ die Abstände der benachbarten Gitterpunkte in der x- und y-Richtung oder die Seiten des Periodenrechtecks, so treten in den Reihen die Elementarfunktionen $\cos m\pi\xi$ und $\cos n\pi\frac{\eta}{\lambda}$ auf, sodaß die Ableitungen $\partial w/\partial\xi$ $\partial w/\partial y$ in den Randpunkten $\xi = 0, 2;\ y = 0, 2\lambda$ verschwinden. Für die Belastungsfunktion setzen wir

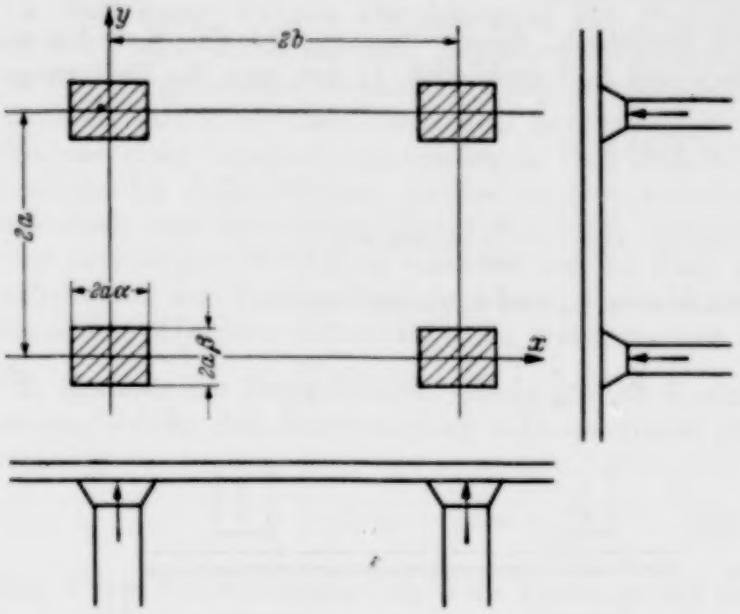

Abb. 3. Pilzdecke.

$$p(x\,y) = q\,f(x)\,g(y) \tag{13}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} f(x) \quad & \frac{1}{2}a_0 + \sum_m a_m \cos m\pi\xi\,, \\ g(y) = & \frac{1}{2}b_0 + \sum_n b_n \cos\frac{n\pi\eta}{\lambda}\,. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Für die Auswertung der *Fourier*schen Integrale gilt dieselbe Bemerkung wie früher. Man erhält dann durch Rechnung

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= 2\alpha\,, \\ a_m &= \frac{2}{m\pi}\sin m\pi\alpha\,, \\ b_0 &= \frac{2\beta}{\lambda}\,, \\ b_n &= \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi\eta}{\lambda}\,. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Damit wird die Druckfunktion

$$\left.\begin{aligned} p(x\,y) = q\alpha\frac{\beta}{\lambda} + \frac{2q\beta}{\pi\lambda}\sum_m\frac{1}{m}\sin m\pi\alpha\cos m\pi\xi + \frac{2q\alpha}{\pi}\sum_n\frac{1}{n}\sin n\pi\frac{\beta}{\lambda}\cos n\pi\frac{\eta}{\lambda} \\ + \frac{4q}{\pi^2}\sum_m\sum_n\frac{1}{m\,n}\sin m\pi\alpha\sin n\pi\frac{\beta}{\lambda}\cos m\pi\xi\cos n\pi\frac{\eta}{\lambda}\,. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Der Konstanten entspricht dabei eine konstante Einsenkung. Im Falle der Pilzdecke (Abb. 3) ist q negativ zu nehmen und $L = 0$ zu setzen. Fügt man noch die gleichmäßige Belastung p_0 hinzu und berücksichtigt, daß aus Gleichgewichtsgründen $p_0 \cdot 4ab = q a^2 \alpha\beta$; $p_0 = q\alpha\beta/\lambda$ ist, so heben sich die Konstanten auf. Macht man nun für die Durchbiegung w einen entsprechenden Ansatz mit zwei einfachen und einer Doppelreihe mit unbestimmten Koeffizienten, so findet man durch Vergleich beider Seiten der Differentialgleichung folgenden Ausdruck, in dem wir den Fall der Fundamentplatte und Pilzdecke zusammenfassen:

$$\left.\begin{aligned} w = w_0 \pm \frac{2qb^4}{N}\Bigg[\frac{\beta}{\lambda}\sum_m\frac{\sin m\pi\alpha\cos m\pi\xi}{m\pi[\pi^4(m\lambda)^4 + (Lb)^4]} + \alpha\sum_n\frac{\sin n\pi\frac{\beta}{\lambda}\cos n\pi\frac{\eta}{\lambda}}{n\pi[(\pi n)^4 + (Lb)^4]} \\ + 2\sum_m\sum_n\frac{\sin m\pi\alpha\sin n\pi\frac{\beta}{\lambda}\cos m\pi\xi\cos n\pi\frac{\eta}{\lambda}}{\pi^2 m\,n[\pi^4(n^2 + m^2\lambda^2)^2 + (Lb)^4]}\Bigg] \quad (m, n = 1, 2, 3\ldots)\,. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Dabei ist das obere positive Vorzeichen für den Fall der Fundamentplatte und das untere negative Vorzeichen für den Fall der freien und gestützten Pilzdecke mit $L = 0$ zu nehmen.

Für den Sonderfall der Punktbelastung ($\alpha = \beta \to 0$; $q \cdot 4a^2\alpha\beta = P$) ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} w = w_0 \pm \frac{Pb^3}{2aN}\Bigg[\sum_m\frac{\cos m\pi\xi}{(\pi\lambda m)^4 + (Lb)^4} + \sum_n\frac{\cos n\pi\frac{\eta}{\lambda}}{(\pi n)^4 + (Lb)^4} + 2\sum_m\sum_n\frac{\cos m\pi\xi\cos n\pi\frac{\eta}{\lambda}}{\pi^4(n^2 + m^2\lambda^2)^2 + (Lb)^4}\Bigg] \\ (m, n = 1, 2, 3\ldots)\,. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Die auftretenden Doppelreihen haben eine schlechte Konvergenz, besonders nach einmaliger und zweimaliger Differentiation und sind deshalb namentlich zur Bestimmung der Momente nicht sehr geeignet. Es wird daher unsere Aufgabe sein, die Reihen nach einer Koordinate zu summieren oder die Doppelreihe in eine einfache Reihe mit m als Laufzahl zu verwandeln.

3. Methode der einfachen Reihen im Fall der aufliegenden Platte unter Vollbelastung. Zur Überführung der Doppelreihe (5) in eine einfache Reihe gehen wir aus von der *Kneser*schen Formel [1]

$$\sum_n{}' \frac{(-1)^n \cos n\,\Theta}{n^2+\omega^2} = \sum_n{}' \frac{\cos n(\pi-\Theta)}{n^2+\omega^2} = -\frac{1}{2\,\omega^2} + \frac{\pi\,\mathfrak{Cof}\,\omega\,\Theta}{2\,\omega\,\mathfrak{Sin}\,\omega\,\pi} \qquad (-\pi \leq \Theta \leq \pi)\,. \tag{19}$$

Integriert man beide Seiten nach Θ im Intervall von 0 bis π, so erhalten wir

$$\sum_n{}' \frac{\sin n(\pi-\Theta)}{n(n^2+\omega^2)} = \frac{\Theta}{2\,\omega^2}\left(1 - \frac{\mathfrak{Sin}\,\omega\,\Theta}{\mathfrak{Sin}\,\omega\,\pi}\right). \tag{20}$$

Aus (20) geht die weitere Formel hervor

$$\left.\begin{aligned} \sum_n{}' \frac{\sin n(\pi-\Theta)}{n(n^2+\omega^2)(n^2+\omega'^2)} &= \frac{1}{\omega^2-\omega'^2}\sum_n{}' \frac{1}{n}\sin n(\pi-\Theta)\left(\frac{1}{n^2+\omega'^2} - \frac{1}{n^2+\omega^2}\right) \\ &= \frac{\Theta}{2\,\omega^2\,\omega'^2}\left[1 + \frac{1}{\omega^2-\omega'^2}\left(\frac{\omega'^2\,\mathfrak{Sin}\,\omega\,\Theta}{\mathfrak{Sin}\,\omega\,\pi} - \frac{\omega^2\,\mathfrak{Sin}\,\omega'\,\Theta}{\mathfrak{Sin}\,\omega'\,\pi}\right)\right]. \end{aligned}\right| \tag{21}$$

die wir ohne weiteres auf die Reihe (5) anwenden können, wenn wir noch folgende Umformung vornehmen. Setzt man nämlich

$$\pi^4(n^2+m^2\lambda^2)^2 + (L\,b)^4 = \pi^4(n^2+k^2\,m^2\lambda^2)\,(n^2+k'^2\,m^2\lambda^2)\,, \tag{22}$$

so erhält man

$$k = \sqrt{1+i\left(\frac{L\,a}{\pi\,m}\right)^2}\,, \qquad k' = \sqrt{1-i\left(\frac{L\,a}{\pi\,m}\right)^2}\,, \qquad k^2\,k'^2 = 1+\left(\frac{L\,a}{\pi\,m}\right)^4. \tag{23}$$

Mit $k = \gamma_m + i\,\delta_m$, $k' = \gamma_m - i\,\delta_m$ wird

$$\gamma_m = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{L\,a}{m\,\pi}\right)^4}+1\right)}, \qquad \delta_m = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{L\,a}{m\,\pi}\right)^4}-1\right)}\,, \tag{24}$$

$$\gamma_m^2+\delta_m^2 = \sqrt{1+\left(\frac{L\,a}{m\,\pi}\right)^4}\,, \qquad \gamma_m^2-\delta_m^2 = 1\,, \qquad \gamma_m\,\delta_m = \frac{1}{2}\left(\frac{L\,a}{m\,\pi}\right)^2. \tag{25}$$

Ersetzen wir jetzt in den Formeln (20) und (21) $\pi-\Theta$ durch $\pi\,\eta/\lambda$ und ω durch $k\,m\lambda$, bzw. ω' durch $k'\,m\lambda$, so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} \sum_n{}' \frac{1}{n}\,\frac{\sin n\,\pi\,\frac{\eta}{\lambda}}{(n^2+m^2k^2\lambda^2)(n^2+m^2k'^2\lambda^2)} &= \frac{\pi\left(1-\frac{\eta}{\lambda}\right)}{2(m\lambda)^4\left[1+\left(\frac{L\,a}{m\,\pi}\right)^4\right]} \\ &+ \frac{\pi}{4\,(m\lambda)^4\,i\left(\frac{L\,a}{m\,\pi}\right)^2}\left[\frac{\mathfrak{Sin}\,k\,m\,\pi(\lambda-\eta)}{k^2\,\mathfrak{Sin}\,k\,m\,\pi\,\lambda} - \frac{\mathfrak{Sin}\,k'\,m\,\pi\,(\lambda-\eta)}{k'^2\,\mathfrak{Sin}\,k'\,m\,\pi\,\lambda}\right]. \end{aligned}\right| \tag{26}$$

Setzt man für k und n' die konjugiert komplexen Werte (25) ein und entwickelt die Funktionen, so treten gemäß den Formeln

$$\mathfrak{Cof}\,(c \pm i\,d) = \mathfrak{Cof}\,c\cos d \pm i\,\mathfrak{Sin}\,c\sin d\,, \qquad \mathfrak{Sin}\,(c \pm i\,d) = \mathfrak{Sin}\,c\cos d \pm i\,\mathfrak{Cof}\,c\sin d$$

hyperbolische und trigonometrische Funktionen auf. Nach einer etwas umständlichen, aber nicht schwierigen Rechnung ergibt sich schließlich bei Benutzung der Beziehungen (22) bis (25), wenn man noch mit $16\,p_0\,b^4/N\pi^6\,m$ multipliziert und über m summiert, für die Durchbiegung folgende Formel[2]:

$$w = \frac{8\,p_0}{N\,L^4}\sum_m{}' \frac{\sin m\pi\,\xi}{m\pi\left[1+\left(\frac{m\,\pi}{L\,a}\right)^4\right]}\left\{1 - \frac{\eta}{\lambda} + \frac{\left(\frac{m\,\pi}{L\,a}\right)^2 P_m + Q_m}{Z_m}\right\}, \qquad (m = 1, 3, 5 \ldots) \tag{27}$$

[1] Vgl. *A. Kneser*, Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik, S. 148, Braunschweig 1911.

[2] Vgl. auch *S. Jguchi*, Eine Lösung für die Berechnung der biegsamen Platten S. 46, Berlin 1933.

wo die Funktionen P_m, Q_m und Z_m folgende Bedeutung haben:

$$\left.\begin{aligned} P_m &= \mathfrak{Sin}\,\gamma_m\, m\pi\,\eta \sin\delta_m\, m\pi\,(2\lambda-\eta) - \mathfrak{Sin}\,\gamma_m\, m\pi\,(2\lambda-\eta)\sin\delta_m\, m\pi\,\eta\,,\\ Q_m &= \mathfrak{Cof}\,\gamma_m\, m\pi\,\eta\cos\delta_m\, m\pi\,(2\lambda-\eta) - \mathfrak{Cof}\,\gamma_m\, m\pi\,(2\lambda-\eta)\cos\delta_m\, m\pi\,\eta\,,\\ Z_m &= \mathfrak{Cof}\,2\,\gamma_m\, m\pi\,\lambda - \cos 2\,\delta_m\, m\pi\,\lambda\,. \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

Die Formel kann noch vereinfacht werden, wenn man unter der Voraussetzung der analytischen Fortsetzbarkeit den Mittelwert der positiven Durchbiegungswerte für die Punkte η_1, den an der Seite $\eta = 0$ gespiegelten Punkt $\eta_2 = -\eta_1$ und die beiden um b davon abstehenden Punkte $\eta_3 = \lambda + \eta_1$ $\eta_4 = \lambda - \eta_1$ bildet (vgl. Abb. 4.), also

$$w = \frac{1}{4}\left[w(\eta_1) + w(-\eta_2) - w(\eta_3) + w(\eta_4)\right].$$

Dabei ergibt sich für die beiden ersten Glieder in der Klammer

$$\frac{1}{4}\left[1 - \frac{\eta_1}{\lambda} + 1 - \frac{\eta_1}{\lambda} - 1 + \frac{\eta_3}{\lambda} + 1 - \frac{\eta_4}{\lambda}\right] = \frac{1}{2}\,.$$

Das Glied mit η fällt also heraus. Ferner ist, wie eine einfache Rechnung ergibt,

$$\left.\begin{aligned} &P_m(\eta_1) + P_m(-\eta_2) - P_m(\eta_3) + P_m(\eta_4) = -4\,(\mathfrak{Cof}\,\gamma_m\, m\pi\,\lambda - \cos\delta_m\, m\pi\,\lambda)\,G_m(\eta)\,,\\ &Q_m(\eta_1) + Q_m(-\eta_2) - Q_m(\eta_3) + Q_m(\eta_4) = -4\,(\mathfrak{Cof}\,\gamma_m\, m\pi\,\lambda - \cos\delta_m\, m\pi\,\lambda)\,H_m(\eta)\,,\\ &Z_m = 2\,(\mathfrak{Cof}\,\gamma_m\, m\pi\,\lambda - \cos\delta_m\, m\pi\,\lambda)\,(\mathfrak{Cof}\,\gamma_m\, m\pi\,\lambda + \cos\delta_m\, m\pi\,\gamma)\,. \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

Daraus folgt dann

$$w = \frac{4\,p_0}{N\,L^4}\sum_m \frac{\sin m\pi\,\xi}{m\pi\left[1+\left(\frac{m\pi}{L\,a}\right)^4\right]}\left[1 \quad \frac{\left(\frac{m\pi}{L\,a}\right)^2 G_m(\eta) + H_m(\eta)}{\mathfrak{Cof}\,\gamma_m\, m\pi\,\lambda + \cos\delta_m\, m\pi\,\lambda}\right] \qquad (m = 1, 3, 5\ldots)\,, \qquad (30)$$

wo

$$\left.\begin{aligned} G_m(\eta) &= \mathfrak{Sin}\,\gamma_m\, m\pi(\lambda-\eta)\sin\delta_m\, m\pi\,\eta + \mathfrak{Sin}\,\gamma_m\, m\pi\,\eta\sin\delta_m\, m\pi(\lambda-\eta)\,,\\ H_m(\eta) &= \mathfrak{Cof}\,\gamma_m\, m\pi(\lambda-\eta)\cos\delta_m\, m\pi\,\eta + \mathfrak{Cof}\,\gamma_m\, m\pi\,\eta\cos\delta_m\, m\pi(\lambda-\eta)\,. \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

Abb. 4. Zur Umformung von w im Falle der Vollbelastung.

4. Die Aufteilung der gefundenen Lösung. Zur Bestätigung der Rechnung kann man noch ein anderes Verfahren[1] anwenden, das zugleich Gelegenheit gibt, einige bemerkenswerte Sonderfälle zu betrachten. Wir gehen zunächst aus von dem Fall des Plattenstreifens ($b = \infty$), dessen Lösung w_1 als Partikularlösung der inhomogenen Gleichung zu gelten hat. Für diesen Fall haben wir also die Differentialgleichung

$$\frac{d^4w}{dx^4} + L^4\left(w - \frac{p_0}{N\,L^4}\right) = 0\,, \qquad (32)$$

die sich bei konstantem p_0 mit $w - \frac{p_0}{N\,L^4} = u$ auf die gewöhnliche linearhomogene Gleichung

$$\frac{d^4u}{dx^4} + L^4\,u = 0 \qquad (33\,a)$$

reduziert, deren charakteristische Gleichung die Wurzeln

$$\lambda = \pm\sqrt{\pm i}\,L = \pm\frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}\,L$$

hat. Wenn man die daraus sich ergebenden Partikularlösungen

$$\mathfrak{Cof}\frac{L\,x}{\sqrt{2}}\cos\frac{L\,x}{\sqrt{2}}\,, \qquad \mathfrak{Sin}\frac{L\,x}{\sqrt{2}}\sin\frac{L\,x}{\sqrt{2}}\,,$$
$$\mathfrak{Cof}\frac{L\,x}{\sqrt{2}}\sin\frac{L\,x}{\sqrt{2}}\,, \qquad \mathfrak{Sin}\frac{L\,x}{\sqrt{2}}\cos\frac{L\,x}{\sqrt{2}}$$

benutzt und die Randbedingungen $w = 0$, $w'' = 0$ für $x = 0$, a beachtet, so ergibt sich als

[1] *E. Estanave*, Contribution à de l'étude l'equilibre élastique d'un plaque etc., Thèses prés. à la Faculté des Sc. de Paris 1900; ferner *M. Lévy*, C. R. 129 (1899), S. 535.

Lösung

$$w_1 = \frac{p_0}{N L^4}\left[1 - \frac{\mathfrak{Cof}\frac{L x}{\sqrt{2}}\cos\frac{L}{\sqrt{2}}(a-x) + \mathfrak{Cof}\frac{L}{\sqrt{2}}(a-x)\cos\frac{L x}{\sqrt{2}}}{\mathfrak{Cof}\frac{L a}{\sqrt{2}} + \cos\frac{L a}{\sqrt{2}}}\right]. \tag{34}$$

Um diese Lösung in eine sin-Reihe von der Form

$$w_1 = \sum A_m \sin m\pi\frac{x}{a}$$

zu entwickeln, haben wir nach *Fourier* die Integrale

$$I = \int_0^a \mathfrak{Cof}\frac{L x}{\sqrt{2}}\cos\frac{L}{\sqrt{2}}(a-x)\sin m\pi\frac{x}{a}\,dx, \qquad I' = \int_0^a \mathfrak{Cof}\frac{L}{\sqrt{2}}(a-x)\cos\frac{L x}{\sqrt{2}}\sin\frac{m\pi x}{a}\,dx$$

auszurechnen. Die beiden Integrale sind gleichwertig mit den Summen

$$I = \frac{1}{2}(\mathfrak{J}_1+\mathfrak{J}_2) = \frac{1}{2}\int_0^a \cos\frac{L}{\sqrt{2}}(a-x+ix)\sin m\pi\frac{x}{a}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^a \cos\frac{L}{\sqrt{2}}(a-x-ix)\sin m\pi\frac{x}{a}\,dx,$$

$$I' = \frac{1}{2}(\mathfrak{J}_1'+\mathfrak{J}_2') = \frac{1}{2}\int_0^a \cos\frac{L}{\sqrt{2}}(x+i(a-x))\sin m\pi\frac{x}{a}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^a \cos\frac{L}{\sqrt{2}}(x-i(a-x))\sin m\pi\frac{x}{a}\,dx.$$

Durch zweimalige Anwendung der partiellen Integration ergibt sich, wie hier nicht näher ausgeführt werden kann,

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{J}_1+\mathfrak{J}_2 &= \frac{-2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^3\left[(-1)^m\,\mathfrak{Cof}\frac{a L}{\sqrt{2}} - \cos\frac{a L}{\sqrt{2}}\right]}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + L^4},\\ \mathfrak{J}_1'+\mathfrak{J}_2' &= \frac{2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^3\left[\mathfrak{Cof}\frac{a L}{\sqrt{2}} - (-1)^m\cos\frac{a L}{\sqrt{2}}\right]}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + L^4}.\end{aligned}\right| \tag{35}$$

Damit wird

$$\frac{1}{2}(\mathfrak{J}_1+\mathfrak{J}_2+\mathfrak{J}_1'+\mathfrak{J}_2') = \frac{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^3[1-(-1)^m]}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + L^4}\left(\mathfrak{Cof}\frac{a L}{\sqrt{2}} + \cos\frac{a L}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^3}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + L^4}\left(\mathfrak{Cof}\frac{a L}{\sqrt{2}} + \cos\frac{a L}{\sqrt{2}}\right)$$

$$(m = 1, 3, 5 \ldots). \tag{36}$$

Da sich auch die Eins reihenmäßig darstellen läßt in der Form

$$1 = \frac{4}{\pi}\sum\frac{1}{m}\sin m\pi\frac{x}{a} \qquad (m = 1, 3, 5 \ldots), \tag{37}$$

so ergibt sich für die Durchbiegung des Plattenstreifens folgender Ausdruck:

$$w_1 = \frac{4 p_0}{N L^4}\sum_m \frac{\sin m\pi\frac{x}{a}}{m\pi\left[1+\left(\frac{m\pi}{L a}\right)^4\right]}. \tag{38}$$

Um die vollständige Lösung für die begrenzte rechteckige Platte zu erhalten, haben wir noch die Lösung der homogenen Gleichung

$$\Delta\Delta w + L^4 w = 0$$

hinzuzufügen. Setzen wir

$$w = Y(y)\sin\frac{m\pi x}{a},$$

so genügt $Y(y)$ der Differentialgleichung

$$Y^{(IV)} - 2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 Y'' + \left[L^4 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4\right] Y = 0 .$$

Mit der früher eingeführten Bezeichnung (22) bis (25) haben wir dann partikuläre Lösungen von der Art

$$\mathfrak{Cof}\,\gamma_m\, m\pi\eta \cos \delta_m\, m\pi\eta , \qquad \mathfrak{Cof}\,\gamma_m\, m\pi\eta \sin \delta_m\, m\pi\eta ,$$

und in Verbindung mit w_1 können wir daher die Gesamtlösung $n' = w_1 + w_2$ in der folgenden Gestalt ansetzen:

$$w = \frac{4\,p_0}{N\,L^4} \sum_m \frac{\sin m\pi\xi}{m\pi\left[1 + \left(\frac{m\pi}{L\,a}\right)^4\right]} [1 - F(\eta)] , \tag{39}$$

wo für die Funktion $F(\eta)$ bei Berücksichtigung der Randbedingungen $w = 0$, $\Delta w = 0$ für $\eta = 0, \lambda$ wieder derselbe Ausdruck gewonnen wird, den wir früher unter (31) ermittelt haben.

Eine gewisse Bestätigung der Rechnung erhält man, wenn man den Grenzfall $a = \infty$ durchführt. Verschiebt man den Anfangspunkt des Koordinatensystem in den Punkt $(a/2, 0)$, so ist

$$\sin m\pi\left(\frac{1}{2} + \xi\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cos m\pi\xi$$

an Stelle von $\sin m\pi\xi$ zu setzen. Da hierbei

$$\sum \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m\pi} \cos m\pi\xi = \frac{1}{4} \qquad (m = 1, 3, 5 \ldots) ,$$

ferner

$$\lim_{a\to\infty} \gamma_m\, m\pi\lambda = \lim \delta_m\, m\pi\lambda = \frac{b\,L}{\sqrt{2}} , \qquad \lim_{a\to\infty} \frac{G_m(\eta)}{2\,\gamma_m\,\delta_m} = 0$$

und

$$\lim_{a\to\infty} H_m(\eta) = \mathfrak{Cof}\,\frac{L}{\sqrt{2}}(b - y) \cos\frac{L}{\sqrt{2}}\,y + \mathfrak{Cof}\,\frac{L\,y}{\sqrt{2}} \cos\frac{L}{\sqrt{2}}(b - y)$$

wird, so erhält man in Übereinstimmung mit der Formel (34) für den Plattenstreifen parallel der x-Richtung

$$\lim_{a\to\infty} w = \frac{p_0}{N\,L^4}\left[1 - \frac{\mathfrak{Cof}\,\frac{L}{\sqrt{2}}(b - y) \cos\frac{L\,y}{\sqrt{2}} + \mathfrak{Cof}\,\frac{L\,y}{\sqrt{2}} \cos\frac{L}{\sqrt{2}}(b - y)}{\mathfrak{Cof}\,\frac{b\,L}{\sqrt{2}} + \cos\frac{b\,L}{\sqrt{2}}}\right] . \tag{40}$$

Das ist gleichzeitig die Durchbiegung für den geraden Balken von konstanter Biegungssteifigkeit $N = EJ$, dessen beide Enden auf festen Stützen frei aufliegen, während seine Unterfläche einen elastischen Untergrund berührt.

5. Die auf elastischem Untergrund gelagerte Platte mit Punktlast. Zur Umformung des Ausdrucks (12) gehen wir aus von der Formel

$$\sin n\pi\frac{\eta_0}{\lambda} \sin n\pi\frac{\eta}{\lambda} = \frac{1}{2}(-1)^n \left[\cos\frac{n\pi}{\lambda}(\lambda - \eta_0 + \eta) - \cos\frac{n\pi}{\lambda}(\lambda - \eta_0 - \eta)\right] . \tag{41}$$

Dann wird entsprechend der früher besprochenen Zerlegung des Nenners

$$\left.\begin{aligned} S = \sum \frac{\sin n\pi\frac{\eta_0}{\lambda} \sin n\pi\frac{\eta}{\lambda}}{\pi^4(n^2 + k^2 m^2 \lambda^2)(n^2 + k'^2 m^2 \lambda^2)} = \frac{1}{(m\pi\lambda)^2(k^2 - k'^2)} \times \\ \times \sum \frac{1}{2}(-1)^n \left[\cos\frac{n\pi}{\lambda}(\lambda - \eta_0 + \eta) - \cos\frac{n\pi}{\lambda}(\lambda - \eta_0 - \eta)\right] \left\{\frac{1}{\pi^2[n^2 + k'^2(m\lambda)^2]} - \frac{1}{\pi^2[n^2 + k^2(m\lambda)^2]}\right\} . \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Nach zweimaliger Anwendung der *Kneser*schen Formel (20) ergibt sich nun

$$\left.\begin{aligned} S = {} & \frac{1}{4\,i\,(m\pi\lambda)^2\left(\frac{L\,a}{m\pi}\right)^2}\times \\ & \left[\frac{\mathfrak{Cof}\,k'\,m\pi(\lambda-\eta_0+\eta)-\mathfrak{Cof}\,k'\,m\pi(\lambda-\eta_0-\eta)}{2\,k'\,m\pi\lambda\,\mathfrak{Sin}\,k'\,m\pi\lambda}-\frac{\mathfrak{Cof}\,k\,m\pi(\lambda-\eta_0+\eta)-\mathfrak{Cof}\,k\,m\pi(\lambda-\eta_0-\eta)}{2\,k\,m\pi\lambda\,\mathfrak{Sin}\,k\,m\pi\lambda}\right] \\ = {} & \frac{1}{2\,i\,(m\pi\lambda)^2\left(\frac{L\,a}{m\pi}\right)^2}\left[\frac{\mathfrak{Sin}\,k'\,m\pi(\lambda-\eta_0)\,\mathfrak{Sin}\,k'\,m\pi\eta}{2\,k'\,m\pi\lambda\,\mathfrak{Sin}\,k'\,m\pi\lambda}-\frac{\mathfrak{Sin}\,k\,m\pi(\lambda-\eta_0)\,\mathfrak{Sin}\,k\,m\pi\eta}{2\,k\,m\pi\lambda\,\mathfrak{Sin}\,k\,m\pi\lambda}\right] \end{aligned}\right\} \quad (43)$$

Bei Einführung von $k=\gamma_m+i\,\delta_m$, $k'=\gamma_m-i\,\delta_m$ und Entwickelung der hyperbolischen Funktionen erhält man schließlich

$$w=\frac{4\,P\,b^3}{N\,a}\,S=\frac{4\,P\,a^2}{N\pi^3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin m\pi\,\xi_0\sin m\pi\,\xi\,[\gamma_m\,X_m(\eta)+\delta_m\,Y_m(\eta)]}{m^3\left(\frac{L\,a}{m\pi}\right)^2\sqrt{1+\left(\frac{L\,a}{m\pi}\right)^4}\,(\mathfrak{Cof}\,2\,\gamma_m\,m\,\pi\,\lambda-\cos 2\,\delta_m\,m\pi\lambda)}, \quad (44)$$

wo die auftretenden Funktionen folgende Bedeutung haben:

$$\left.\begin{aligned} X_m(\eta) = {} & \mathfrak{Sin}\,\gamma_m\,m\pi(\lambda-\eta_0)\cos\delta_m\,m\pi(\lambda-\eta_0)\cdot F(\eta) \\ & -\mathfrak{Cof}\,\gamma_m\,m\pi(\lambda-\eta_0)\sin\delta_m\,m\pi(\lambda-\eta_0)\cdot G(\eta), \\ Y_m(\eta) = {} & \mathfrak{Sin}\,\gamma_m\,m\pi(\lambda-\eta_0)\cos\delta_m\,m\pi(\lambda-\eta_0)\cdot G(\eta) \\ & +\mathfrak{Cof}\,\gamma_m\,m\pi(\lambda-\eta_0)\sin\delta_m\,m\pi(\lambda-\eta_0)\cdot F(\eta), \end{aligned}\right\}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} F(\eta) = {} & \frac{1}{2}[\mathfrak{Sin}\,\gamma_m\,m\pi(\lambda+\eta)\sin\delta_m\,m\pi(\lambda-\eta)-\mathfrak{Sin}\,\gamma_m\,m\pi(\lambda-\eta)\sin\delta_m\,m\pi(\lambda+\eta)], \\ G(\eta) = {} & \frac{1}{2}[\mathfrak{Cof}\,\gamma_m\,m\pi(\lambda+\eta)\cos\delta_m\,m\pi(\lambda-\eta)-\mathfrak{Cof}\,\gamma_m\,m\pi(\lambda-\eta)\cos\delta_m\,m\pi(\lambda+\eta)]. \end{aligned}\right\} \quad (45)$$

Die Formel (44) gilt zunächst für $\eta\leq\eta_0$, während die entsprechende Reihe für $\eta>\eta_0$ nach dem Reziprozitätsgesetz aus (44) durch Vertauschung von η und η_0 hervorgeht. Die Ableitung nach η erleidet dabei keine Unstetigkeit. Man hat, wie man leicht feststellt,

$$\left(\frac{\partial w}{\partial\eta}\right)_{\eta_0}=$$

$$-\frac{P\,a^2}{N}\sum_m\frac{\sin m\pi\,\xi_0\sin m\pi\,\xi\,[\mathfrak{Sin}\,2\,\gamma_m\,m\pi(\lambda-\eta_0)\sin 2\,\delta_m\,m\pi\,\eta_0+\mathfrak{Sin}\,2\,\gamma_m\,m\pi\,\eta_0\sin 2\,\delta_m\,m\pi(\lambda-\eta_0)]}{(m\pi)^3\left(\frac{L\,a}{m\pi}\right)^2(\mathfrak{Cof}\,2\,\gamma_m\,m\pi\lambda-\operatorname{ocs}2\,\delta_m\,m\pi\lambda)}. \quad (46)$$

Wenn die Last in der Mitte der Platte angreift, erhalten wir mit $\xi_0=1/2;\eta_0=1/2$

$$w=\frac{4\,P\,a^2}{N\pi^3}\sum_m\frac{\sin\frac{1}{2}m\pi\sin m\pi\,\xi(\gamma_m\,X_m+\delta_m\,Y_m)}{m^3\left(\frac{L\,a}{m\pi}\right)^2\sqrt{1+\left(\frac{L\,a}{m\pi}\right)^4}\,(\mathfrak{Cof}\,\gamma_m\,m\pi\lambda+\cos\delta_m\,m\pi\lambda)} \qquad (m=1,3,5\ldots), \quad (47)$$

wo die Funktionen X_m und Y_m übergehen in

$$\left.\begin{aligned} X_m = {} & \mathfrak{Sin}\,\gamma_m\,m\pi\frac{\lambda}{2}\cos\delta_m\,m\pi\frac{\lambda}{2}\cdot F(\eta)-\mathfrak{Cof}\,\gamma_m\,m\pi\frac{\lambda}{2}\sin\delta_m\,m\pi\frac{\lambda}{2}\cdot G(\eta), \\ Y_m = {} & \mathfrak{Sin}\,\gamma_m\,m\pi\frac{\lambda}{2}\cos\delta_m\,m\pi\frac{\lambda}{2}\cdot G(\eta)+\mathfrak{Cof}\,\gamma_m\,m\pi\frac{\lambda}{2}\sin\delta_m\,m\pi\frac{\lambda}{2}\cdot F(\eta). \end{aligned}\right\} \quad (48)$$

Die Durchbiegung im Lastpunkt wird dann

$$w_P=\frac{P\,a^2}{N\pi^3}\sum\frac{\sin^2\frac{1}{2}m\pi\,(\delta_m\,\mathfrak{Sin}\,\gamma_m\,m\pi\lambda-\gamma_m\sin\delta_m\,m\pi\lambda)}{m^3\left(\frac{L\,a}{m\pi}\right)^2\sqrt{1+\left(\frac{L\,a}{m\pi}\right)^4}\,(\mathfrak{Cof}\,\gamma_m\,m\pi\lambda+\cos\delta_m\,m\pi\lambda)}. \quad (49)$$

Für die gewöhnliche freie Platte ($L=0$) erhält man mit $\gamma_m=1$, $\delta_m=0$, $2\,\delta=\left(\frac{L\,a}{m\pi}\right)^2$ die für

$\eta \leq \eta_0$ gültige Formel

$$w = \frac{P a^2}{N \pi^3} \sum_{m=1}^{\infty}{}' \frac{\sin m\pi \xi_0 \sin m\pi \xi}{m^3 \operatorname{Sin} m\pi\lambda} \{\operatorname{Sin} m\pi(\lambda - \eta_0)\,[(1 + m\pi\lambda \operatorname{Cotg} m\pi\lambda) \operatorname{Sin} m\pi\eta - m\pi\eta \operatorname{Cof} m\pi\eta] - m\pi(\lambda - \eta_0) \operatorname{Cof} m\pi(\lambda - \eta_0) \operatorname{Sin} m\pi\eta\}\,, \quad (50)$$

während für $\eta > \eta_0$ die Formel

$$w = \frac{P a^2}{N \pi^3} \sum_{m=1}^{\infty}{}' \frac{\sin m\pi \xi_0 \sin m\pi \xi}{m^3 \operatorname{Sin} m\pi\lambda} \{\operatorname{Sin} m\pi(\lambda - \eta)\,[(1 + m\pi\lambda \operatorname{Cotg} m\pi\lambda) \operatorname{Sin} m\pi\eta_0 - m\pi\eta_0 \operatorname{Cof} m\pi\eta_0] - m\pi(\lambda - \eta) \operatorname{Cof} m\pi(\lambda - \eta) \operatorname{Sin} m\pi\eta_0\} \quad (51)$$

zu benutzen ist[1]. Wir haben in Abb. 5 die Höhenschichtlinien der Biegefläche für den Fall $\xi_0 = 1/2$ $\eta_0 = 1/2$, $\lambda = 1{,}5$ gezeichnet. Bemerkenswert ist, daß die Stelle der größten Durchbiegung nicht mit dem Lastpunkt zusammenfällt.

Ist der Lastpunkt in der Plattenmitte ($\xi_0 = 1/2$, $\eta_0 = \lambda/2$), so wird

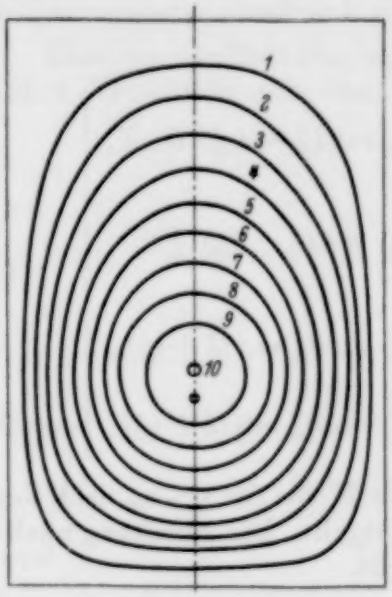

Abb. 5. Höhenschichtlinien der Biegefläche einer frei aufliegenden Platte mit Punktbelastung $\left(\lambda = 1{,}5;\ \xi_0 = \frac{1}{2},\ \eta_0 = \frac{1}{2}\right)$.

$$w = \frac{P a^2}{2 N \pi^3} \sum \frac{\sin \frac{m\pi}{2} \sin m\pi\xi}{n^3 \operatorname{Cof} m\pi \frac{\lambda}{2}} \left[\operatorname{Sin} m\pi\eta \left(1 + \frac{m\pi\lambda}{2} \operatorname{Tg} \frac{m\pi\lambda}{2}\right) - m\pi\eta \operatorname{Cof} m\pi\eta\right]. \quad (50\,a)$$

Im Lastpunkt erhält man dann

$$\left.\begin{aligned} w_P &= \frac{P a^2}{4 N \pi^3} \sum \frac{\sin^2 \frac{1}{2} m\pi (\operatorname{Sin} m\pi\lambda - m\pi\lambda)}{m^3 \operatorname{Cof}^2 \frac{m\pi\lambda}{2}} \\ &= \frac{P a^2}{2\pi^3 N} \sum \frac{\operatorname{Tg} \frac{m\pi\lambda}{2}}{m^3} \left(1 - \frac{m\pi\lambda}{\operatorname{Sin} m\pi\lambda}\right) \\ &\qquad (m = 1, 3, 5 \ldots)\,. \end{aligned}\right\} \quad (52)$$

Bei der quadrischen Platte ($\lambda = 1$) hat man z. B. bei Beschränkung auf das erste Glied der gut konvergierenden Reihe

$$w_P = 0{,}0108 \frac{P a^2}{N}\,. \quad (53)$$

6. Die Durchbiegung einer durchlaufenden Platte mit Punktbelastung auf elastisch nachgiebiger Unterlage. Die unter (17) aufgestellte Doppelreihe kann unmittelbar durch die *Knesersche* Formel (19) umgestaltet werden, wenn man von der Darstellung

$$\left.\begin{aligned} \sum \frac{\cos n\pi \frac{\eta}{\lambda}}{\pi^4 (n^2 + k^2 m^2 \lambda^2)(n^2 + k'^2 m^2 \lambda^2)} &= \\ = \frac{1}{(m\pi\lambda)^2 (k^2 - k'^2)} \sum_n \cos n\pi \frac{\eta}{\lambda} &\left[\frac{1}{n^2\pi^2 + k'^2 (m\pi\lambda)^2} - \frac{1}{n^2\pi^2 + k^2 (m\pi\lambda)^2}\right] \end{aligned}\right\} \quad (54)$$

ausgeht. Man findet dann mit den früher eingeführten Bezeichnungen nach Trennung des Reellen und Imaginären

$$\sum \frac{\cos n\pi \frac{\eta}{\lambda}}{\pi^4 (n^2 + m^2\lambda^2)^2 + (L b)^4} = \frac{\gamma_m R_m(\eta) + \delta_m T_m(\eta)}{2 m\pi\lambda (L b)^2 \sqrt{1 + \left(\frac{L a}{m\pi}\right)^4}\, Z_m} - \frac{1}{2 (m\pi\lambda)^4 \left[1 + \left(\frac{L a}{m\pi}\right)^4\right]}\,, \quad (55)$$

wo folgende Abkürzungen eingeführt wurden:

$$\left.\begin{aligned} R_m(\eta) &= \operatorname{Cof} \gamma_m m\pi\eta \sin \delta_m m\pi(2\lambda - \eta) + \operatorname{Cof} \gamma_m m\pi(2\lambda - \eta) \sin \delta_m m\pi\eta\,, \\ T_m(\eta) &= \operatorname{Sin} \gamma_m m\pi\eta \cos \delta_m m\pi(2\lambda - \eta) + \operatorname{Sin} \gamma_m m\pi(2\lambda - \eta) \cos \delta_m m\pi\eta\,, \\ Z_m &= \operatorname{Cof} 2\gamma_m m\pi\lambda - \cos 2\delta_m m\pi\lambda\,. \end{aligned}\right\} \quad (56)$$

[1] Vgl. auch *K. Grein*, Pilzdecken, S. 34, 2. Auflage, Berlin 1948.

Man sieht daher, daß sich die erste *Lewe*sche m-Reihe heraushebt und die Formel geht daher im Falle der Fundamentplatte über in

$$w = w_0 + \frac{P}{2\,N\,L^2}\sum \frac{\cos m\pi\,\xi}{m\pi\sqrt{1+\left(\frac{L\,a}{m\pi}\right)^4}}\,\frac{\gamma_m R_m(\eta)+\delta_m T_m(\eta)}{Z_m} + \frac{P}{2\,N\,L^4\,a\,b}\sum{}' \frac{\cos n\pi\,\frac{\eta}{\lambda}}{1+\left(\frac{n\pi}{L\,b}\right)^4}\,. \tag{57}$$

Für die Summe im letzten Glied erhält man aus der allgemeinen Formel, wenn man $k^2 = i$, $k'^2 = -i$, also $k = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, $k' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$ und für die als konstant zu bewertende Größe $m\pi\,\lambda$ den Wert $L\,b$ einsetzt, die Reihe

$$\sum \frac{\cos n\pi\,\frac{\eta}{\lambda}}{1+\left(\frac{n\pi}{L\,b}\right)^4} =$$

$$\frac{L\,b}{4}\left\{\sqrt{2}\,\frac{\mathfrak{Cof}\frac{L\,y}{\sqrt{2}}\sin\frac{L}{\sqrt{2}}(2\,b-y)+\mathfrak{Cof}\frac{L}{\sqrt{2}}(2\,b-y)\sin\frac{L\,y}{\sqrt{2}}+\mathfrak{Sin}\frac{L\,y}{\sqrt{2}}\cos\frac{L}{\sqrt{2}}(2\,b-y)+\mathfrak{Sin}\frac{L}{\sqrt{2}}(2\,b-y)\cos\frac{L\,y}{\sqrt{2}}}{\mathfrak{Cof}\sqrt{2}\,L\,b-\cos\sqrt{2}\,L\,b}-\frac{2}{L\,b}\right\} \tag{58}$$

$$= \frac{L\,b}{4}\left\{\sqrt{2}\,\frac{K(y)}{Z(b)}-\frac{2}{L\,b}\right\}.$$

Es ergibt sich daher im Ganzen folgender Ausdruck für die Durchbiegung:

$$w = w_0 + \frac{P}{4\sqrt{2}\,N\,L^3\,a}\,\frac{K(y)}{Z(b)} + \frac{P}{2\,N\,L^2}\sum_m \frac{\cos m\pi\,\xi}{m\pi\sqrt{1+\left(\frac{L\,a}{m\pi}\right)^4}}\,\frac{\gamma_m R_m(\eta)+\delta_m T_m(\eta)}{Z_m} = w_0 + w_1 + w_2\,. \tag{59}$$

Hier ist w_0 eine Konstante, w_1 die partikuläre, von x unabhängige Lösung, die einem der x-Richtung parallelen Plattenstreifen von der Breite $2b$ mit einer Einsparung in $y = 0$ und $2b$ und einer gleichmäßig verteilten Last entspricht. Die Größe w_2 gibt als allgemeine Lösung der homogenen Gleichung die Durchbiegung einer in $x = 0$ u. $2\,a$; $y = 0$ u. $2\,b$ eingespannten Einlastplatte.

7. Der Fall der Pilzdecke mit Punktstützen. Zur Bestätigung der Rechnung wollen wir noch den Grenzfall $L = 0$, $\alpha = \beta = 0$ betrachten. Man erhält dann z. B.

$$\lim_{L\to 0}\frac{\gamma_m R_m(\eta)+\delta_m T_m(\eta)}{Z} = \frac{\mathfrak{Cof}\,m\pi(\lambda-\eta)[1+m\pi\lambda\,\mathfrak{Cotg}\,m\pi\lambda]-m\pi(\lambda-\eta)\,\mathfrak{Sin}\,m\pi(\lambda-\eta)}{\mathfrak{Sin}\,m\pi\lambda}\,. \tag{60}$$

Wenn man den Anfangspunkt in die Mitte des Stützenrechtecks legt, also an Stelle von ξ und η die Summe $1+\xi$ und $\eta+\lambda$ setzt, so geht w_2 über in

$$w_2 = \frac{P\,a^2}{4\,N\pi^3}\sum{}' \frac{(-1)^m\cos m\pi\,\xi}{m^3\,\mathfrak{Sin}\,m\pi\lambda}\,[\mathfrak{Cof}\,m\pi\eta\,(1+m\pi\lambda\,\mathfrak{Cof}\,m\pi\lambda)-m\pi\eta\,\mathfrak{Sin}\,m\pi\eta]\,. \tag{61}$$

Für w_1 haben wir dagegen mit $L \to 0$

$$\lim_{L\to 0} w_1 = \frac{P\,b^3}{2\,\pi^4\,N\,a}\sum{}' \frac{(-1)^{n+1}\cos n\pi\,\frac{\eta}{\lambda}}{n^4}\,. \tag{62}$$

Nun ist

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{(-1)^n\cos n\pi\,\frac{\eta}{\lambda}}{\pi^4\,n^4} = \text{konst.} - \frac{1}{48}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)^2.$$

Wir erhalten also, von einer Konstanten abgesehen,

$$w_1 = \frac{1}{24}\,\frac{P}{4\,a\,b}\,(b^2-y^2)^2 = \frac{1}{24}\,p\,b^4\left[1-\left(\frac{y}{b}\right)^2\right]^2. \tag{63}$$

Die Durchführung des Grenzüberganges an dem unter (58) stehenden, bereits summierten Ausdruck für w_1 ist etwas umständlich und soll nur kurz skizziert werden. Denn man muß hierbei im Zähler die drei ersten Glieder in den Reihenentwicklungen für die trigonometrischen und hyperbo-

lischen Funktionen, d. h. die Glieder bis zur fünften Potenz des Argumentes berücksichtigen, während im Nenner die ersten beiden Glieder ausreichend sind. Setzen wir also

$$\left.\begin{matrix}\mathfrak{Cof}\, z = \\ \cos z = \end{matrix}\right| 1 \pm \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} \pm \dots, \qquad \left.\begin{matrix}\mathfrak{Sin}\, z = \\ \sin z = \end{matrix}\right| z \pm \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} \pm \dots,$$

so erhalten wir

$$\lim \frac{L\,b\sqrt{2}}{4} K(y) : Z(b) = \frac{L^6}{8\,L^2\,b}\Big|\frac{(b-y)\,(b+y)^4}{48} + \frac{(b+y)\,(b-y)^4}{48} - \frac{(b+y)^2\,(b-y)^3}{24} - \frac{(b+y)^3\,(b-y)^2}{24} + \frac{(b+y)^5}{240} + \frac{(b-y)^5}{240}\Big| = -\frac{L^4(b^2-y^2)^2}{48} + \text{konst}. \tag{64}$$

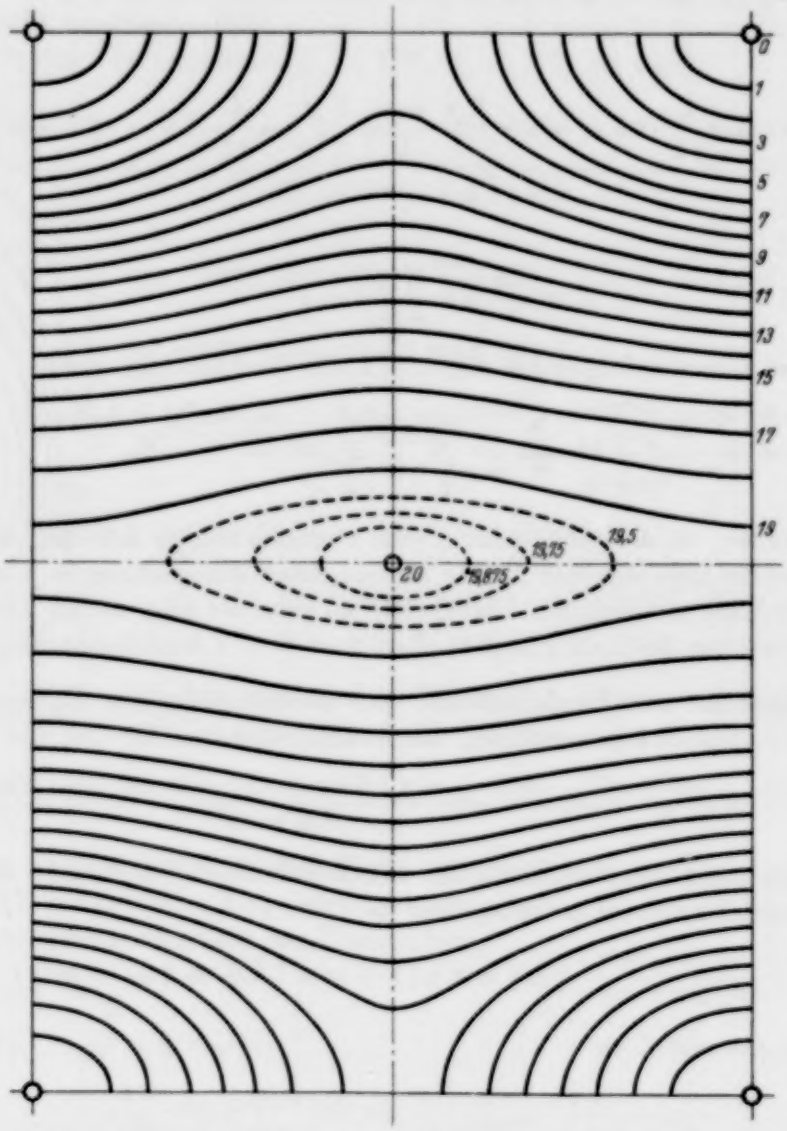

Abb. 6. Höhenschichtlinien für die Biegefläche einer durchlaufenden Pilzdecke mit Punktstützen ($\lambda = 1{,}5$).

Damit wird in der Tat

$$\lim_{L \to 0} w_1 = \frac{p}{24\,N}(b^2 - y^2)^2 .$$

Setzen wir w_1 und w_2 in unsere Reihe (54) ein, so erhalten wir für die gewöhnliche, gleichmäßig belastete und punktartig gestützte Pilzdecke, bezogen auf den Mittelpunkt des Stützenrechtecks, folgenden Ausdruck für die Durchbiegung:

$$w = w_0 + \frac{p\,b^4}{24\,N}\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^2 + \frac{p\,a^3\,b}{N\pi^3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}\cos m\pi\xi}{m^3\,\mathfrak{Sin}\, m\pi\lambda}\left[(1 + m\pi\lambda\,\mathfrak{Cotg}\, m\pi\lambda)\,\mathfrak{Cof}\, m\pi\eta - m\pi\eta\,\mathfrak{Sin}\, m\pi\eta\right]. \tag{65}$$

Für die Mitte ($\xi = \eta = 0$) haben wir

$$w_f = w_0 + \frac{p\,b^4}{24\,N} + \frac{p\,a^3\,b}{N\pi^3} \sum \frac{(-1)^{m+1}}{m^3 \operatorname{Sin} m\pi\lambda} (1 + m\pi\lambda \operatorname{Cotg} m\pi\lambda)\,, \tag{66}$$

oder bei Beschränkung auf das erste Glied der Reihe mit $\operatorname{Cotg} \pi\lambda \approx 1$

$$w_f \approx w_0 + \frac{p\,b^4}{24\,N}\left[1 + \frac{24}{(\lambda\pi)^3} \frac{1+\pi\lambda}{\operatorname{Sin} \pi\lambda}\right]. \tag{66a}$$

Die Konstante w_0 kann etwa dadurch bestimmt werden, daß man die Stützen als starr, also die Durchbiegung hier gleich Null setzt.

Wir haben die Höhenschichtlinien der Biegungsfläche nach (65) für die Fälle $\lambda = 1{,}5$ und $\lambda = 1$ in den Abb. 6 und 7 zur Darstelllung gebracht.

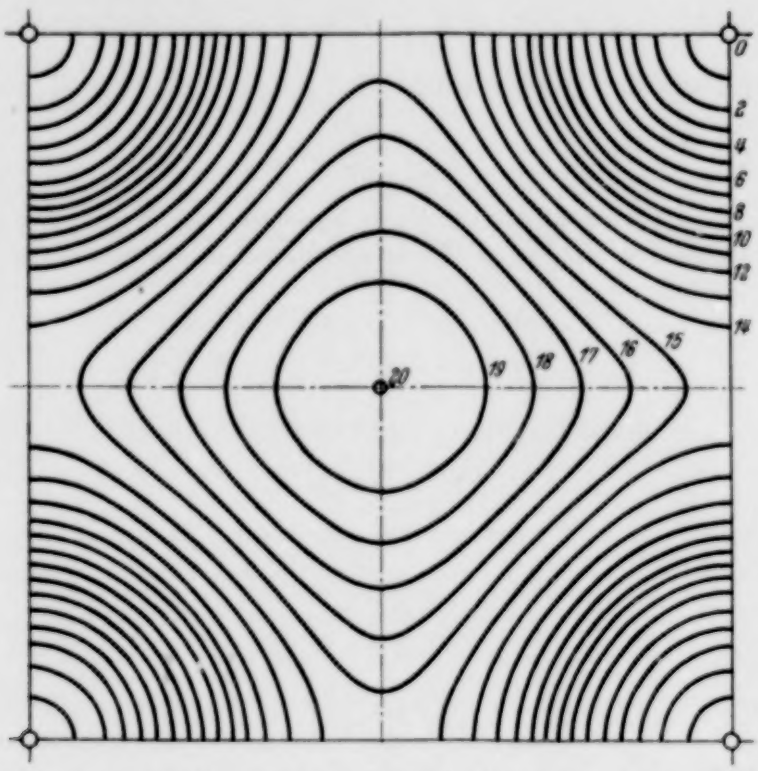

Abb. 7. Höhenschichtlinien für die Biegefläche einer durchlaufenden Pilzdecke mit Punktstützen ($\lambda = 1$).

8. Sonderfall einer auf elastischer Unterlage ruhenden Fundamentalplatte mit einer Einzelkraftreihe. Wenn man in den Ausdrücken (59) die Seite b ins Unendliche wachsen läßt, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{b\to\infty} \frac{\gamma_m R_m(\eta) + \delta_m T_m(\eta)}{Z_m} = e^{-\gamma_m m\pi\eta} (\gamma_m \sin \delta_m\, m\pi\eta + \delta_m \cos \delta_m\, m\pi\eta)\,, \\ &\lim_{b\to\infty} \frac{K(y)}{Z(b)} = e^{-\frac{L\,y}{\sqrt{2}}} \left(\sin \frac{L\,y}{\sqrt{2}} + \cos \frac{L\,y}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

Damit ergibt sich, wenn man gleichzeitig das Vorzeichen der Kräfte umkehrt, die Durchbiegung einer durchlaufenden Platte mit einer einfachen Kraftreihe in Übereinstimmung mit *Nadai* [1] und *Westergaard* [2] in folgender Form:

$$\left.\begin{aligned} w = w_0 &+ \frac{P}{4\sqrt{2}\,L^3\,a\,N}\, e^{-\frac{L\,y}{\sqrt{2}}} \left(\sin \frac{L\,y}{\sqrt{2}} + \cos \frac{L\,y}{\sqrt{2}}\right) \\ &+ \frac{P}{2\,N\,L^2} \sum{}' \frac{\cos m\pi\xi\, e^{-\gamma_m m\pi\eta} (\gamma_m \sin \delta_m\, m\pi\eta + \delta_m \cos \delta_m\, m\pi\eta)}{m\pi \sqrt{1 + \left(\frac{L\,a}{m\pi}\right)^4}}. \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

[1] *A. Nadai*, a. a. O. S. 188.
[2] *H. M. Westergaard*, Ingenioren 32 (1923), S. 517 f.

Die größte Durchbiegung im Punkte $x = y = 0$ wird, von einer Konstanten abgesehen,

$$w_f = \frac{P}{2\sqrt{2}\,a\,N\,L^3}\left[\frac{1}{2} + L\,a\sum\frac{1}{m\pi}\sqrt{\frac{\sqrt{1+\left(\frac{L\,a}{m\pi}\right)^4}-1}{1+\left(\frac{L\,a}{m\pi}\right)^4}}\right]. \tag{69}$$

Interessant ist ferner der Grenzfall der unendlich ausgedehnten Platte, die eine Einzelkraft trägt. Der Biegungspfeil für diesen Fall ergibt sich aus (69), wenn man a ins Unendliche wachsen läßt. Der erste von w_1 herrührende Teil wird dabei Null. Der andere Teil geht mit $\frac{m\pi}{a} = u$, $\frac{\pi}{a} = du$ in ein Integral über. Man erhält also

$$w_f = \frac{P}{2\sqrt{2}\,\pi\,N\,L^2}\int_0^\infty \sqrt{\frac{\sqrt{L^4+u^4}-u^2}{L^4+u^4}}\,du. \tag{70}$$

Wenn man nach *Westergaard* die Substitution

$$u^2 = \frac{L^2}{2\,v\sqrt{1+v^2}}$$

anwendet, so erhält man in Übereinstimmung mit einer von *H. Hertz*[1] bei der Untersuchung der in einem Punkt belasteten schwimmenden Platte abgeleiteten Formel

$$w_f = \frac{P}{\sqrt{8}\,N\,L^3\pi}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\infty \frac{dv}{1+v^2} = \frac{P}{8\,N\,L^2}. \tag{71}$$

Der größte Bodendruck unterhalb der Platte wird

$$p = NL^4\,w_f, \tag{72}$$

also in dem oben betrachteten Fall, wenn man noch die Nachgiebigkeitsziffer $c = L^4\,N$ der Bettung einführt,

$$P = \frac{P\,L^2}{8} = \frac{P}{8}\sqrt{\frac{2\,c(1-\nu^2)}{E\,h^3}}. \tag{73}$$

9. Schlußbemerkung. Die weiteren Folgerungen aus den gegebenen Ansätzen, namentlich die Verfolgung des Verlaufs der Momente mit Hilfe der Thetafunktionen, insbesondere für den bemerkenswerten Fall der Pilzdecke, sowie eine Methode zur Ableitung der Durchbiegung aus der Momentenfläche durch eine reine Integration soll später gegeben werden. Schließlich hofft der Verfasser auf die mathematisch nicht ganz einfache Behandlung der Fundamentplatten und Pilzdecken mit endlich-rechteckigen Angriffs- bzw. Stützflächen ausführlich zurückzukommen.

(Eingegangen am 25. Februar 1952.)

Anschrift des Verfassers. Prof. Dr. *W. Müller*, München 9, Taubenstr. 4 I.

[1] Vgl. *H. Hertz*, Wiedemanns Annalen, N. F. 22 (1984), S. 449; ferner *H. Hertz*, Ges. Werke, I. Bd. S. 288 (1895), Leipzig.

Integraltafeln. Sammlung unbestimmter Integrale elementarer Funktionen

Von Dr.-Ing. **W. Meyer zur Capellen,** Aachen. VIII, 292 Seiten. 1950. Ganzleinen DM 36,—

Aus den Besprechungen: Physiker, Chemiker und Ingenieure werden das Erscheinen eines handlichen Tafelwerkes für Integrale über elementare Funktionen sehr begrüßen, vor allem dann, wenn eine solche Zusammenstellung auch Integrale enthält, die auf sog. höhere Funktionen (elliptische Integrale, Integralsinus usw.) führen, welche ihrerseits in den bekannten Tabellenwerken (z. B. Jahnke-Emde) behandelt sind. Der Benutzer des vorliegenden Werkes findet auch Rekursionsformeln und Substitutionen, die ihn instand setzen, rasch auch solche Integrale zu berechnen, die hier nicht explizit angeschrieben sind. Der Wunsch, daß der Verfasser eine Sammlung bestimmter Integrale folgen lassen möge, erscheint vielleicht unbescheiden, wenn man daran denkt, wieviel Arbeit aufgewendet werden muß, um ein Tafelwerk wie das hier besprochene zu gestalten. Wir sind jedenfalls dem Verfasser für seine Sammlung unbestimmter Integrale sehr dankbar.
„Zeitschrift für angewandte Physik"

Mechanik deformierbarer Körper. Von Professor Dr.-Ing. Friedrich Tölke, Karlsruhe.

Erster Band: **Der punktförmige Körper.** Mit 339 Abbildungen im Text. VIII, 388 Seiten. 1949. Ganzleinen DM 45,—

Aus den Besprechungen: Wenn der Verfasser im Vorwort zu dieser 2. Auflage den Wunsch äußert, daß dieses Buch dazu beitragen möge, „neue Brücken zwischen der Mathematik und der Technik zu schlagen", so wird ihm jeder Mathematiker, dem durch eigene Tätigkeit in der Technik bekannt ist, was es heißt, die Rolle eines Vermittlers zwischen Mathematik und Technik zu übernehmen, nicht nur gerne bestätigen, daß dieses Werk einen wertvollen Beitrag in dieser Richtung darstellt, sondern er wird ihm auch seine Bewunderung darüber zum Ausdruck bringen, in welch hervorragender Weise diese schwierige Aufgabe hier gelöst wurde...
„Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure"

Matrizen. Eine Darstellung für Ingenieure

Von Dr.-Ing. **Rudolf Zurmühl.** Mit 25 Abbildungen. XV, 427 Seiten. 1950.
Ganzleinen DM 25,50

Aus den Besprechungen: In der Matrizenrechnung hat sich die lineare Algebra ein Ausdrucksmittel von besonderer Anpassungsfähigkeit geschaffen. Was früher durch umständliche Gleichungssysteme dargestellt wurde, wird nun in einfacher und übersichtlicher Weise durch Matrizen ausgedrückt. Während der Mathematiker schon lange mit der Matrizenrechnung vertraut ist, ist sie den meisten Ingenieuren noch fremd. Dieses Buch will nun den Ingenieuren die Matrizenrechnung erschließen. Dies gelingt durch eine lebendige und verständliche Darstellung. Die Probleme und Begriffe werden klar auseinandergesetzt und der Leser wird in den Stand gesetzt, damit zu operieren. Die vielen, vollständig durchgerechneten Beispiele zeigen, wie man mit Matrizen praktisch rechnet... Das Buch wird dazu beitragen, daß die Matrizenrechnung bald ein wertvolles Hilfsmittel moderner Ingenieurmathematik wird. Die Darstellung ist allgemein gehalten, nicht bloß auf technische Anwendungen zugeschnitten. Wenn auch das Buch in erster Linie für Ingenieure geschrieben ist, so ist es auch den Mathematikern sehr zu empfehlen.
„Monatshefte für Mathematik"

Konforme Abbildung

Von Dipl.-Ing. Dr. phil. **Albert Betz,** Direktor des Max-Planck-Instituts für Strömungsforschung und Professor an der Universität Göttingen. Mit 276 Bildern. VIII, 359 Seiten. 1948. DM 36,—

Aus den Besprechungen: Dieses schon seit langem erwartete Buch ist aus Vorlesungen entstanden, die der Verfasser 1932/33 vor Hörern hielt, die mit den Grundlagen der konformen Abbildung bekannt gemacht werden sollen, bei denen aber keine weitergehenden Kenntnisse der Funktionentheorie vorauszusetzen waren. Es geht von der geometrischen Anschauung aus, ohne zunächst den Begriff der komplexen Zahlen zu verwenden. Um die Zuordnung zweier Ebenen anschaulicher zu machen, benutzt es in der Hauptsache die flächenhafte Verteilung elektrischer Ströme. Durch Überlagerung solcher Verteilungen und durch Vergleich zweier Verteilungen gewinnt Verfasser verhältnismäßig komplizierte Abbildungen. Nachdem dabei gleichzeitig eine Reihe von Begriffen der Funktionentheorie eingeführt sind, werden erst jetzt mit komplexen Funktionen eine Reihe von Abbildungen behandelt, die durch einfache Funktionen gewonnen werden. Dabei wird immer das Anschauliche und die Anwendung hervorgehoben. So werden die wichtigsten Aufgaben der Strömungstheorie untersucht, z. B. Strömungen um Tragflügel, Abbildung kreisähnlicher Figuren, Zusammenhang zwischen Profilform und Geschwindigkeitsverteilung usw. Unter anderem wird hier ein bisher nicht veröffentlichtes Verfahren von Wittich-Riegels zur Abbildung von Tragflügelprofilen auf Kreise angegeben. Die beiden letzten Abschnitte sind der Abbildung durch doppelperiodische Funktionen und den freien Strahlen gewidmet.
So ist ein Buch entstanden, das einen Überblick über die wichtigsten Verfahren der konformen Abbildung und ihre hauptsächlichsten Anwendungen gibt, ausgehend von leicht verständlichen, anschaulichen Methoden, fortschreitend zu recht weitgehenden Problemen. In hervorragender Weise erfüllt das Buch seinen Zweck, allen, die konforme Abbildung gebrauchen, eine Anleitung zu ihrer praktischen Verwendung zu geben. Darüber hinaus vermittelt es eine sehr anschauliche Einführung in entsprechende Teilgebiete der Funktionentheorie.
„Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik"

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Einführung in die Baustatik. Von Professor Dipl.-Ing. Dr. techn. **E. Melan,** Wien. Mit 242 Textabbildungen. X, 328 Seiten. 1950. DM 28,50; gebunden DM 31,50

Aus den Besprechungen: ... Das vorliegende Werk des bekannten Verfassers befaßt sich mit der Theorie der ebenen Tragwerke und setzt dabei die elementaren Begriffe der Statik als bekannt voraus. Auf Grund der aus der Kinematik der Tragwerkscheiben hergeleiteten Erkenntnisse wird die Verteilung der äußeren und inneren Kräfte bestimmt. Behandelt werden weiter das Prinzip der virtuellen Verschiebungen mit seinen Anwendungen sowie die Formänderungen und Biegelinien der statisch bestimmten und unbestimmten Systeme. Ausführlich entwickelt *Melan* das Verfahren der Einflußlinien und erläutert die Ermittlung dieser Linien nach verschiedenen Verfahren. Die gewonnenen Erkenntnisse werden in ihrer Anwendung auf einige der am häufigsten angewandten Fachwerksysteme — den frei aufliegenden Träger, den Bogen- und Rahmenträger, den mit einem Stabbogen verstärkten Träger und den Durchlaufträger — gezeigt. Das Buch erfreut durch seine klare und übersichtliche Gliederung und durch die einprägsame Behandlung des Stoffes. Es wird jedem, der sich mit dem behandelten Stoff erstmals vertraut machen will, gute Dienste leisten. Aber auch dem in der Praxis stehenden Ingenieur, besonders dem Stahlbauer, wird es bei der Wiederauffrischung mancher Kenntnisse von Nutzen sein. *„VDI-Zeitschrift"*

Ebene und räumliche Rahmentragwerke. Von Dr.-Ing. **V. Kupferschmid.** Mit 252 Abbildungen. VII, 196 Seiten. 1952. Ganzleinen DM 35,70

Das Buch behandelt die Berechnung ebener und räumlicher Rahmentragwerke auf einheitlicher Grundlage. Der Verfasser geht dabei von dem Nachweis aus, daß der durch die Belastung eines Rahmens verursachte Formänderungszustand aus bekannten Formänderungszuständen abgeleitet werden kann. Als Ausgangssystem wird der „Rahmen mit verschieblichen, aber unverdrehbaren Knoten" eingeführt, ein System, das sich für jeden Verschiebungszustand einfach berechnen läßt, da in ihm alle Stäbe in den Knoten fest eingespannt sind. Die praktische Anwendung der Methode wird durch eine Reihe von Zahlenbeispielen erleichtert, die so gewählt sind, daß in Anlehnung an sie jede Rahmenform bei beliebiger Belastung berechnet werden kann. Die grundlegenden Gedanken der Behandlung der Rahmentragwerke in der vorliegenden Art folgen aus der „Deformationsmethode" von *Ostenfeld* (Verlag Julius Springer, Berlin 1926) und dem Momentenausgleichsverfahren von *Cross*.

Dynamik des Bogenträgers und Kreisringes. Von Professor Dr. **K. Federhofer,** Graz. Mit 35 Textabbildungen und 26 Zahlentafeln. XII, 179 Seiten. 1950. DM 23,—

Aus den Besprechungen: ... Das vorliegende Werk des bekannten Autors stellt im wesentlichen eine Erweiterung unserer Kenntnisse in der Schwingungsforschung dar. Wird doch im Gegensatz zu den bekannten Standardwerken über technische Schwingungsprobleme der Fall gekrümmter Stäbe einer eingehenden Behandlung unterzogen. Der Verfasser beschränkt sich aber nicht nur auf die allgemeine Behandlung der Probleme, sondern er ist bemüht bis zur zahlenmäßigen Auswertung jedes Problems vorzudringen. So findet man auch die Näherungsverfahren in vollkommener Art durchgeführt und es ist dem Leser möglich, mittels der zahlreichen Tabellen und Darstellungen jedes einschlägige Problem auch rasch überschlagsweise zu beurteilen. *„Acta Physica Austriaca"*

Summeneinflußwerte für den einfachen Balken und den symmetrischen Zweifeldträger für Straßenbrücken. Von Dr. Ing. **Friedrich Schweda,** Wien. Mit 46 Abbildungen im Text und in 10 Zahlentafeln. VI, 79 Seiten. 1952. Steif geheftet DM 17,70

Ausgehend vom einfachen Balken werden für den symmetrischen Zweifeldträger für die Belastungsschemen von Straßenbrücken, die aus einem Einzelfahrzeug und einer vor und hinter diesem angeordneten Gleichlast bestehen, Tabellenwerte angegeben, mit deren Hilfe sich die größten Momente und Querkräfte solcher Träger in ähnlich rascher Weise wie für eine felderweise gleichmäßige Vollbelastung ermitteln lassen. Auf den Einfluß der Veränderlichkeit des Trägheitsmomentes in der bei Stahlbetonträgern üblichen Form ist Rücksicht genommen.

SPRINGER-VERLAG / WIEN

Diesem Heft liegen 3 Prospekte des Springer-Verlages, Berlin · Göttingen · Heidelberg, bei.

Springer-Verlag / Berlin · Göttingen · Heidelberg. Printed in Germany. Q 57 275 4022 0,8 K. B./Z. 040